Universidad Autónoma de Madrid
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Familias de superficies de Riemann, uniformización y aritmeticidad

Tesis presentada por

Sebastián Reyes Carocca

para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Dirigido académicamente por

Gabino González Diez y Rubén Hidalgo Ortega

Julio, 2015

AGRADECIMIENTOS

Como es difícil escribir en un espacio tan reducido todos los agradecimientos que me gustaría expresar, primero deseo agradecer de forma general a todos quienes de alguna u otra forma contribuyeron a la finalización de esta etapa. En segundo lugar me gustaría hacer algunas menciones especiales. A mi madre Patricia y mi hermano Ricardo por estar presente a la distancia con su apoyo y cariño constante e incondicional. A Gabino por dirigir esta tesis y por haberme guiado de forma excepcional durante estos cuatro años con paciencia, tiempo y dedicación. A Rubén por las estancias que realicé en Valparaíso, por el tiempo dedicado a leer esta tesis y por las sugerencias hechas para enriquecerla. A Abel por sus múltiples sugerencias lingüísticas. A la Fundación Carolina de España y al Ministerio de Educación del Gobierno de Chile por haberme financiado económicamente y al Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Madrid por facilitarme todo lo necesario para escribir esta tesis.

RESUMEN, RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Una superficie de Riemann es una variedad analítica compleja de dimensión uno, esto es, un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y conexo provisto de cartas locales sobre abiertos del plano complejo, de modo que las funciones de transición son aplicaciones holomorfas. Como toda superficie de Riemann es a la vez una variedad real diferenciable orientable de dimensión dos, las compactas están clasificadas desde un punto de vista topológico por su género. Si bien existe sólo una clase de isomorfía de superficies de Riemann de género cero, la clasificación analítica es, en general, bastante más complicada. En efecto, el espacio que parametriza clases de isomorfía de superficies de Riemann de género $g > 1$ es un espacio analítico complejo de dimensión $3g - 3$; este espacio es conocido como el espacio de módulos. La teoría elemental de cubrimientos nos permite asegurar que cualquier superficie de Riemann se realiza como el espacio de órbitas de su cobertor universal bajo la acción de un grupo adecuado de automorfismos. Por otro lado, el Teorema de Uniformización provee los únicos tres candidatos para ser aquel cobertor universal. En concreto, este importante teorema asegura que la esfera de Riemann, el plano complejo y el disco unitario son las únicas superficies de Riemann que son simplemente conexas; estas opciones se corresponden, en el caso compacto, con superficies de Riemann de género cero, uno y mayor que uno respectivamente.

Una variedad algebraica proyectiva es un subconjunto irreducible de un espacio proyectivo obtenido como el lugar común de los ceros de una colección finita de polinomios homogéneos. Curvas y superficies algebraicas proyectivas son variedades algebraicas proyectivas de dimensión uno y dos respectivamente. Un subcuerpo k del cuerpo de los números complejos es un cuerpo de definición para una variedad algebraica proyectiva X si existe una colección de polinomios con coeficientes en k de tal suerte que la variedad algebraica proyectiva que ellos definen sea isomorfa a X. Una variedad algebraica proyectiva es aritmética si admite la clausura algebraica del cuerpo de los números racionales como cuerpo de definición. Como consecuencia del Teorema de Riemann-Roch y del Teorema de la Función Implícita, existe una equivalencia entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas proyectivas. Es por esta razón que tiene sentido hablar de superficies de Riemann aritméticas y estudiar cómo la aritmeticidad, que es una propiedad algebraica, se traduce en su estructura compleja. En este sentido, el Teorema de Belyi establece que una superficie de Riemann es aritmética si y sólo si admite una función

meromorfa que ramifica sobre exactamente tres valores; aquella función es llamada una función de Belyi.

Sea V una superficie compleja y C una superficie de Riemann. Una aplicación holomorfa $f : V \to C$ es una familia de superficies de Riemann si f es sobreyectiva, propia y de rango maximal en todo punto de tal suerte que sus fibras sean superficies de Riemann topológicamente equivalentes. La familia es de tipo finito hiperbólico si cada fibra es una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico, esto es, una superficie de Riemann compacta de género g desde la cual removemos n puntos de modo que $2g-2+n > 0$. Usando la teoría de uniformización simultánea de Bers para superficies de Riemann, Griffiths demostró que cualquier variedad algebraica proyectiva posee un abierto de Zariski cuyo cobertor universal es un tipo muy especial de dominio acotado y contractible que, en la terminología de Bers, se denomina un dominio de Bergman. Nos referiremos a este resultado como el Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths. Como consecuencia de este importante resultado, el cobertor universal de una familia $V \to C$ de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico es un dominio de Bergman. Además, gracias a trabajos de Shabat, el grupo cobertor universal de V tiene índice finito en el grupo completo de automorfismos del cobertor universal de V.

No hay razón para sospechar que todo dominio de Bergman aparezca como el cobertor universal de una familia de superficies de Riemann. De hecho, el primer resultado de este trabajo (Teorema 4.21) provee un criterio para decidir cuándo un dominio de Bergman corresponde al cobertor universal de una familia de superficies de Riemann; a estos dominios de Bergman los hemos llamado de tipo algebraico. Esta caracterización está basada en el estudio de una sucesión exacta de grupos y de un movimiento holomorfo asociado al dominio de Bergman. Más aún, algunos dominios de Bergman de tipo algebraico aparecen como cobertores universales de familias aritméticas de superficies de Riemann, es decir, familias tales que el espacio base, el espacio total (suponiendo que éste es una superficie algebraica casi-proyectiva) y la aplicación entre ellos son aritméticos. A estos dominios de Bergman los hemos llamado de tipo aritmético. El segundo resultado de esta tesis (Teorema 5.11) provee condiciones necesarias y suficientes para que un dominio de Bergman de tipo algebraico sea de tipo aritmético.

González-Diez generalizó el Teorema de Belyi para superficies algebraicas proyectivas reemplazando las funciones de Belyi por los llamados pinceles de Lefschetz. En particular, este teorema implica que si una superficie algebraica proyectiva es aritmética entonces contiene un abierto de Zariski cuyo cobertor universal es un dominio de Bergman de tipo aritmético. El tercer y más relevante resultado de esta tesis (Teorema 5.17) establece que la implicancia anterior es, de hecho, una equivalencia. Notamos que este resultado nos dice que la aritmeticidad de una superficie algebraica proyectiva está completamente determinada por la clase de isomorfía de los cobertores universales de sus abiertos de Zariski. Este hecho contrasta con lo que ocurre en el caso de curvas algebraicas proyectivas para las cuales el cobertor universal depende sólo del género.

Una clase muy especial de familias de superficies de Riemann son las fibraciones de Kodaira, esto es, familias de superficies de Riemann $S \to C$ donde C y las fibras son superficies de Riemann compactas y S es una superficie algebraica proyectiva. Estas fibraciones fueron introducidas por Kodaira como un ejemplo para probar que la signatura de un fibrado diferenciable no es multiplicativa o, de forma equivalente, que la pendiente del espacio total puede ser mayor que dos. Sea k un subcuerpo algebraicamente cerrado del cuerpo de los números complejos. Para estas fibraciones hemos demostrado que k es un cuerpo de definición para S si y sólo si lo es para C (Teorema 6.1) y también que la propiedad de estar definida sobre aquel cuerpo depende únicamente de la clase de isomorfía de su cobertor universal (Teorema 6.2). Además, construimos de forma bastante explícita una colección biparamétrica de fibraciones de Kodaira que, gracias a los resultados antes mencionados, da lugar a una colección no-numerable de dominios dos-dimensionales contractibles simplemente conexos que no son isomorfos (Teorema 6.9). La pendiente de estas fibraciones también se incluye (Proposición 6.10).

Esta tesis está estructurada de la siguiente manera. En el primer capítulo repasaremos los preliminares necesarios: superficies de Riemann, grupos fuchsianos, curvas algebraicas proyectivas, acciones de grupos y automorfismos. En el segundo capítulo introduciremos el espacio de Teichmüller y el grupo modular asociado a una superficie de Riemann. Presentaremos el espacio de módulos como el cociente entre ellos y estudiaremos también ciertas subvariedades del espacio de Teichmüller. En el tercer capítulo estudiaremos familias de superficies de Riemann, la fibración de Bers, la familia universal, la curva universal y la Propiedad Universal de Teichmüller. Introduciremos también ciertos cocientes lisos del espacio de Teichmüller. En el cuatro capítulo exhibiremos la demostración de Bers del Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths para variedades algebraicas proyectivas y su adaptación para familias de superficies de Riemann. Además, introduciremos el concepto de movimiento holomorfo para plantear y luego demostrar el Teorema 4.21. En el quinto capítulo estudiaremos la aritmeticidad para variedades algebraicas, poniendo énfasis en curvas y superficies, así como la aritmeticidad para familias de superficies de Riemann. Además, haciendo uso de la compactificación de Deligne-Mumford del espacio de módulos, mostraremos cómo familias de superficies de Riemann pueden ser compactificadas; los Teoremas 5.11 y 5.17 se demuestran en este capítulo. El último capítulo estará enteramente dedicado a estudiar las fibraciones de Kodaria y a demostrar los resultados ya mencionados para estas familias.

Los resultados más importantes de esta tesis pueden encontrarse en los siguientes trabajos:

(a) González-Diez, G., y Reyes-Carocca, S., *The arithmeticity of a Kodaira fibration is determined by its universal cover,* Comm. Math. Helv., Por aparecer.

(b) González-Diez, G., y Reyes-Carocca, S., *Families of Riemann surfaces, uniformization and arithmeticity,* Preprint.

En siguiente artículo también contiene resultados relacionados con los temas tratados en esta tesis:

(c) Hidalgo, R. y Reyes-Carocca, S., *A constructive proof of Weil's Galois descent theorem*, arXiv:1203.6294.

MAIN RESULTS AND CONCLUSIONS

A Riemann surface is a one-dimensional complex analytic manifold, that is, a Hausdorff topological space, second countable and connected endowed with local charts over open subsets of the complex plane, in such a way that the coordinate changes are holomorphic maps. As each Riemann surface is also an orientable two-dimensional real differential manifold, the compact ones are classified from a topological point of view by its genus. Although there is only one isomorphism class of compact Riemann surfaces of genus zero, the analytic classification is, in general, far more complicated. Indeed, the space that parametrizes isomorphism classes of Riemann surfaces of genus $g > 1$ is a complex analytic space of dimension $3g - 3$; this space is known as the moduli space. Basic theory of covering spaces allows us to assert that every Riemann surface can be realized as the orbit space of its universal cover by the action of a suitable group of automorphisms. On the other hand, Uniformization's Theorem provides the only three possibilities for this universal cover. More precisely, this important theorem states that the Riemann sphere, the complex plane and the unit disk are the only Riemann surfaces which are simply connected; these options correspond, in the compact case, to Riemann surfaces of genus zero, one and greater than one respectively.

A projective algebraic variety is an irreducible subset of a projective space obtained as the common locus of the zeros of a finite collection of homogeneous polynomials. Projective algebraic curves and surfaces are projective algebraic varieties of dimension one and two respectively. A subfield k of the field of the complex numbers is a field of definition for a projective algebraic variety X if there exists a collection of polynomials with coefficients in k in such a way that the projective algebraic variety they define is isomorphic to X. A projective algebraic variety is arithmetic if it admits the algebraic closure of the field of the rational numbers as a field of definition. As a consequence of Riemann-Roch's Theorem and the Implicit Function's Theorem, there is an equivalence between compact Riemann surfaces and projective algebraic curves. Thus, it makes sense the concept of arithmetic Riemann surface and to study how the arithmeticity, which is an algebraic property, is reflected on its complex structure. Indeed, Belyi's Theorem establishes that a Riemann surface is arithmetic if and only if it admits a meromorphic function which ramifies over exactly three values; this function is called a Belyi map.

Let V be a complex surface and C a Riemann surface. A holomorphic map $f : V \to C$ is called a family of Riemann surfaces if f is a surjective proper map everywhere of maximal rank so that its fibers are topologically equivalent Riemann surfaces. The family is called of finite hyperbolic type if each fiber is a Riemann surface of finite hyperbolic type, that is, a compact Riemann surface of genus g with n points removed such that $2g - 2 + n > 0$. By making use of Bers' theory of simultaneous uniformization of Riemann surfaces, Griffiths proved that every projective algebraic variety is endowed with an open Zariski subset whose universal cover is a very special kind of bounded contractible domain which, in the Bers' terminology, is called a Bergman domain. We shall refer to this result as Bers-Griffiths' Uniformization Theorem. As a consequence of this important result, the universal cover of a family $V \to C$ of Riemann surfaces of finite hyperbolic type is a Bergman domain. Furthermore, by results due to Shabat, the universal covering group of V has finite index in the full group of automorphisms of the universal cover of V.

There is not a reasonable argument in order to conjecture that every Bergman domain should arise as the universal cover of a family of Riemann surfaces. In fact, the first result of this thesis (Theorem 4.21) provides a criterion in order to decide when a Bergman domain corresponds to the universal cover of a family of Riemann surfaces; we have called them Bergman domains of algebraic type. This characterization is based on the study of an exact sequence of groups and a holomorphic motion associated to the Bergman domain. Moreover, some Bergman domains of algebraic type arise as the universal covers of arithmetic families of Riemann surfaces, that is, families such that the base space, the total space (which is supposed to be a quasi-projective algebraic surface) and the map between them are arithmetic. We have called them Bergman domains of arithmetic type. The second result of this thesis (Theorem 5.11) provides necessary and sufficient conditions for a Bergman domain of algebraic type to be of arithmetic type.

González-Diez generalized Belyi's Theorem for projective algebraic surfaces by replacing Belyi functions by the so-called Lefschetz pencils. In particular, this theorem implies that if a projective algebraic surface is arithmetic then it contains a Zariski open subset whose universal cover is a Bergman domain of arithmetic type. The third and main result of this thesis (Theorem 5.17) establishes that the converse also holds. Namely, this result states that the property of being arithmetic for a projective algebraic surface is completely determined by the isomorphism class of the universal covers of its Zariski open subsets. We note that the situation for projective algebraic surfaces differs radically from that of projective algebraic curves for which the universal cover depends only on the genus.

A very special kind of families of Riemann surfaces are Kodaira fibrations, that is, families of Riemann surfaces $S \to C$ where C and the fibers are compact Riemann surfaces and S is a projective algebraic surface. These fibrations were introduced by Kodaira as an example to prove that the signature of a differentiable fibration is not multiplicative. This property of the signature is equivalent to the total space having slope greater than two. Let k be an algebraically closed subfield of the field of the complex numbers. For these fibrations we have proved that k is a field of definition for S if and only if k is a field of definition for C (Theorem 6.1) and also that the property of being defined over that field only depends on the isomorphism class of the universal cover (Theorem 6.2). Moreover, we have constructed, in a very explicit way, a biparametric collection of Kodaira fibrations which, by the results already announced, gives rise to an uncountable collection of two-dimensional simply connected contractible domains which are not isomorphic (Theorem 6.9). The slope of these fibrations is also provided (Proposition 6.10).

The thesis is organized as follows. In the first chapter we shall briefly review some standard background: Riemann surfaces, Fuchsian groups, projective algebraic curves, group actions and automorphisms. In the second chapter we shall introduce the Teichmüller space and the mapping class group associated to a Riemann surface. Moduli space is also introduced as the quotient between them. Some submanifolds of Teichmüller space are also considered. In the third chapter we will study families of Riemann surfaces, Bers' fiber space, the universal family, the universal curve and the Teichmüller's Universal Property. We shall also introduce some smooth quotients of the Teichmüller space. In the fourth chapter, we will exhibit the proof given by Bers of Bers-Griffiths' Uniformization Theorem for algebraic varieties and its adaptation for families of Riemann surfaces. Furthermore, we shall introduce the concept of holomorphic motion in order to state and prove Theorem 4.21. In the fifth chapter we shall study the arithmeticity for algebraic varieties, mainly for curves and surfaces, as well as for families of Riemann surfaces. Moreover, by making use of the Deligne-Mumford compactification of the moduli space, we shall show how families of Riemann surfaces can be compactified; Theorems 5.11 and 5.17 are proved in this chapter. The last chapter will be entirely devoted to study Kodaira fibrations and to prove the results already announced for this families.

The main results of this thesis can be found in the following papers:

(a) González-Diez, G., and Reyes-Carocca, S., *The arithmeticity of a Kodaira fibration is determined by its universal cover,* Comm. Math. Helv., To appear.

(b) González-Diez, G., and Reyes-Carocca, S., *Families of Riemann surfaces, uniformization and arithmeticity,* Preprint.

The following paper also includes results related to the contents of this thesis:

(c) Hidalgo, R. and Reyes-Carocca, S., *A constructive proof of Weil's Galois descent theorem*, arXiv:1203.6294.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Z}$	anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	cuerpo de los números complejos
$\mathbb{S}^1$	círculo unitario en el plano complejo
$\mathbb{H}$	semiplano superior en el plano complejo
$\mathbb{L}$	semiplano inferior en el plano complejo
Δ	disco unitario en el plano complejo
$\overline{\mathbb{C}}$	esfera de Riemann
$\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$	grupo de transformaciones de Möbius
$\mathbb{P}^n$	espacio proyectivo $n-$dimensional
$\mathrm{Aut}(S)$	grupo de automorfismos de S
$\mathcal{M}(S)$	cuerpo de funciones meromorfas de S
$\mathrm{mult}_p(f)$	multiplicidad de f en p
$\deg(f)$	grado de f
K_S	clase canónica de S
$\mathrm{div}(\omega)$	divisor canónico asociado a la $1-$forma ω
$\mathrm{div}(f)$	divisor principal asociado a la función f
$H^{1,0}(S)$	espacio vectorial de $1-$formas de S
$\Omega(G)$	región de discontinuidad de G
$\Lambda(G)$	conjunto límite de G
$\mathrm{stab}(z)$	estabilizador de z
$N(G)$	normalizador de G
$\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$	grupo cíclico de orden k
μ_f	dilatación compleja de f
$T_{g,n}$	espacio de Teichmüller
$T_{g,n}(H_0)$	espacio de Teichmüller respecto a H_0
$\mathrm{Mod}_{g,n}$	grupo modular
$\mathrm{Mod}_{g,n}(H_0)$	grupo modular respecto a H_0
$\mathrm{mod}_{g,n}$	grupo modular extendido
$\mathscr{M}_{g,n}$	espacio de módulos
$F_{g,n} \to T_{g,n}$	espacio fibrado de Bers
$V_{g,n} \to T_{g,n}$	familia universal
$\mathscr{C}_{g,n} \to \mathscr{M}_{g,n}$	curva universal

Índice general

CAPÍTULO 1

Preliminares

En el primer capítulo de este trabajo repasaremos los objetos y resultados básicos que hay que manejar para entender los capítulos siguientes. Aprovecharemos de fijar la notación.

1.1. Superficies de Riemann

DEFINICIÓN 1. Una variedad analítica compleja X de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff, segundo numerable y conexo provisto de una colección de abiertos $\{U_\alpha\}$ que cubren X y homeomorfismos $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ sobre abiertos de $\mathbb{C}^n$ de tal suerte que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ entonces la función de transición

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

es holomorfa. Los pares $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ son las cartas locales y la colección $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es el atlas o la estructura compleja de X.

DEFINICIÓN 2. Una superficie de Riemann es una variedad analítica compleja de dimensión uno.

Intuitivamente, una superficie de Riemann es un objeto que localmente luce como un abierto del plano complejo y, en consecuencia, podemos realizar análisis complejo sobre ella.

EJEMPLO 1.1. Los ejemplos más elementales de superficies de Riemann son los abiertos conexos del plano complejo provistos de la identidad como única carta local. Algunos abiertos distinguidos son el semiplano superior

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\},$$

el semiplano inferior

$$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\},$$

el disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y el mismo plano complejo.

Todos estos ejemplos son simplemente conexos y no compactos. El primer ejemplo compacto corresponde a la compactificación de $\mathbb{C}$ por un punto: la esfera de Riemann

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

provista de la estructura compleja dada por las cartas $(\mathbb{C}, z \mapsto z)$ y $(\overline{\mathbb{C}} - \{0\}, z \mapsto 1/z)$. Nótese que la esfera de Riemann también es simplemente conexa.

Ejemplo 1.2. Sea $\{\omega_1, \omega_2\}$ un subconjunto de $\mathbb{C}$ linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ y

$$\Lambda = \{n\omega_1 + m\omega_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$$

el reticulado de $\mathbb{C}$ generado por ω_1 y ω_2. La relación

$$z_1 \simeq_\Lambda z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in \Lambda$$

es de equivalencia. Denotamos por

$$S = \mathbb{C}/\Lambda = \{[z] : z \in \mathbb{C}\}$$

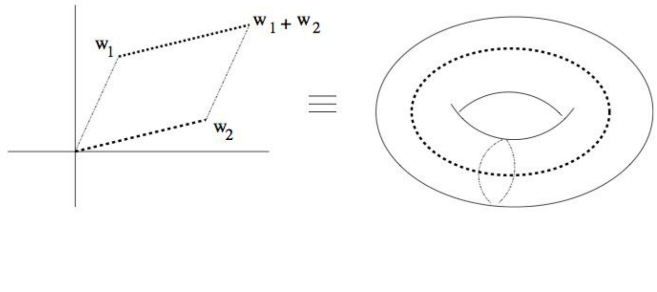
el conjunto de clases provisto de la topología cociente dada por la proyección canónica $\pi : \mathbb{C} \to S$ tal que $z \mapsto [z]$.

Cada $z \in \mathbb{C}$ tiene un entorno V de tal suerte que

$$\pi^{-1}(U) = \cup_{\lambda \in \Lambda}(\lambda + V)$$

es una unión disjunta, donde $U = \pi(V)$. De esta forma $\pi|V : V \to U$ es un homeomorfismo y por tanto $(U, (\pi|V)^{-1})$ es una carta local para S. Con esta construcción las funciones de transición son aplicaciones de la forma $z \mapsto z + \lambda$ con $\lambda \in \Lambda$ y por tanto holomorfas; sigue que S es una superficie de Riemann.

Éste es un ejemplo de una superficie de Riemann compacta con estructura de grupo abeliano que no es simplemente conexa. Diremos que S es un toro complejo; puede representarse luego de identificar los lados opuestos del paralelógramo de vértices $0, \omega_1, \omega_2$ y $\omega_1 + \omega_2$ como se ilustra en la figura siguiente.



Como toda superficie de Riemann es a la vez una variedad real diferenciable de dimensión dos, las compactas están clasificadas, desde un punto de vista topológico, por su género. Ver, por ejemplo [**52**, p. 9].

DEFINICIÓN 3. Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación continua entre dos superficies de Riemann. Diremos que f es una aplicación holomorfa si para cada $p \in S_1$ es posible escoger cartas locales (U, φ) y (V, ψ) de p y $f(p)$ respectivamente, de tal suerte que $f(U) \subset V$ y

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

sea holomorfa en el sentido usual.

Un homeomorfismo f es un isomorfismo si f y f^{-1} son holomorfas. Si existe un isomorfismo entre S_1 y S_2 entonces diremos que éstas son isomorfas y anotaremos $S_1 \cong S_2$. Un isomorfismo de una superficie en sí misma es un automorfismo; denotaremos por $\mathrm{Aut}(S)$ el grupo de automorfismos de S.

EJEMPLO 1.3. El semiplano superior y el disco unitario son isomorfos. En efecto, la aplicación

$$\varphi : \mathbb{H} \to \Delta \qquad z \mapsto \frac{z - i}{z + i}$$

es un isomorfismo entre ellos. Por otro lado, el plano complejo y el semiplano superior no son isomorfos. En efecto, si existiese un isomorfismo ψ entre ellos, entonces la composición

$$\varphi \circ \psi : \mathbb{C} \to \Delta$$

sería una aplicación entera, no constante y acotada. Esto contradice el Teorema de Liouville -ver, por ejemplo [**47**, p. 130].

TEOREMA 1.1. *Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann con S_1 compacta. Entonces f es constante o sobreyectiva. Si f es sobreyectiva entonces S_2 es compacta.*

Como corolario se puede ver que las únicas funciones holomorfas $S \to \mathbb{C}$ de una superficie de Riemann compacta S son las funciones constantes.

El Teorema de la Aplicación de Riemann -ver, por ejemplo [**47**, p. 306]- clasifica todos los abiertos conexos y simplemente conexos del plano complejo. Esencialmente existen dos tipos: el mismo plano complejo y el disco unitario.

TEOREMA 1.2. *Sea U un abierto conexo y simplemente conexo estrictamente contenido en $\mathbb{C}$. Entonces U y Δ son isomorfos.*

La esfera de Riemann, el plano complejo y el semiplano superior son tres superficies de Riemann esenciales para construir nuevos ejemplos, como veremos más adelante. Comenzamos estudiando sus grupos de automorfismos.

Definición 4. Una transformación de Möbius es una aplicación de la esfera de Riemann en sí misma de la forma

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

donde a, b, c, d son números complejos tales que $ad - bc = 1$.

Denotaremos por $\text{Möb}(\mathbb{C})$ el grupo de todas las transformaciones de Möbius. El homomorfismo de grupos sobreyectivo

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \text{Möb}(\mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

tiene núcleo $\{\pm id\}$ y por tanto se tiene que

$$\text{Möb}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

Proposición 1.3. *El grupo de transformaciones de Möbius* $\text{Möb}(\mathbb{C})$ *es el grupo completo de automorfismos de la esfera de Riemann.*

El Teorema de Casorati-Weierstrass -ver, por ejemplo [**47**, p. 168]- implica que cada automorfismo del plano complejo se extiende a uno de la esfera de Riemann. De esta forma el grupo de automorfismos de $\mathbb{C}$ está compuesto por aquellas transformaciones de Möbius que fijan el infinito

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$$

mientras que el grupo de automorfismos del semiplano superior consiste en las transformaciones de Möbius con entradas reales

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

El Ejemplo 1.3 nos permite determinar el grupo completo de automorfismos del disco unitario, a saber, conservando notaciones

$$\mathrm{Aut}(\Delta) = \varphi \mathrm{Aut}(\mathbb{H})\varphi^{-1} = \left\{ z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\overline{a}z},\, a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $g \in \text{Möb}(\mathbb{C})$ no trivial. Después de resolver la ecuación $g(z) = z$ para z, es fácil ver que g tiene uno o dos puntos fijos. Podemos clasificar las transformaciones de Möbius no triviales de la siguiente manera:

(a) Si g tiene exactamente un punto fijo entonces diremos que g es parabólica. En tal caso, g es conjugada a la traslación $z \mapsto z + 1$.

(b) Si g tiene dos puntos fijos entonces es conjugada a $z \mapsto \lambda e^{i\theta} z$. Si $\lambda = 1$ entonces diremos que g es elíptica; en caso contrario diremos que es g es loxodrómica.
(c) Una transformación loxodrómica con $\theta = 0$ se llama hiperbólica.

Diremos que una superficie de Riemann S tiene una pinchadura si contiene un abierto isomorfo a $\Delta - \{0\}$. En tal caso existe una superficie de Riemann R, única módulo isomorfismo, tal que

$$R - \{1\,\text{punto}\} \cong S$$

y así la pinchadura de S se corresponde con el punto distinguido de R.

Definición 5. Diremos que S es una superficie de Riemann de tipo finito (g, n) con $g, n \geq 0$ si

$$S \cong R - \{x_1, \ldots, x_n\}$$

donde R es una superficie de Riemann compacta de género g y $x_1, \ldots, x_n$ son n puntos distintos en R. También se dice S que tiene género g y n pinchaduras.

El grupo fundamental $\pi_1(S)$ de una superficie de Riemann S de tipo finito (g, n) está generado por $2g$ elementos hiperbólicos $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ y n elementos parabólicos $c_1, \ldots, c_n$ satisfaciendo

$$\prod_{j=1}^{g} [a_j, b_j] \prod_{k=1}^{n} c_k = 1,$$

donde $[u, v] = uvu^{-1}v^{-1}$ es el conmutador entre u y v.

La teoría elemental de cubrimientos nos dice que cada espacio topológico local arco-conexo S (en particular una superficie de Riemann) se puede realizar como el espacio de órbitas

$$S \cong \tilde{S}/G$$

donde $\tilde{S}$ es el cobertor universal de S y $G \cong \pi_1(S)$ es el grupo de transformaciones del cubrimiento universal $\pi : \tilde{S} \to S$, dado por

$$G = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{S}) : \pi \circ \varphi = \pi\}.$$

La acción de G sobre $\tilde{S}$ es propiamente discontinua y no tiene puntos fijos (en la Sección 1.3 estudiaremos con detalle estos conceptos); de esta forma es posible dotar al cobertor universal de una única estructura de superficie de Riemann de tal suerte que π sea holomorfa.

El siguiente teorema dice que hay sólo tres posibilidades para el cobertor universal de una superficie de Riemann. Es conocido en la literatura como el Teorema de Uniformización; ver, por ejemplo [**20**, p. 180].

Teorema 1.4. *Si S es una superficie de Riemann simplemente conexa entonces S es isomorfa a una de las siguientes:*

(a) *La esfera de Riemann.*
(b) *El plano complejo.*
(c) *El semiplano superior.*

1.2. Curvas Algebraicas y el Teorema de Riemann-Roch

En esta sección abordaremos las superficies de Riemann desde un punto de vista algebraico: como ceros de polinomios homogéneos en espacios proyectivos complejos.

Denotaremos por $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo complejo $n-$dimensional definido como el conjunto de órbitas de la acción multiplicativa de $\mathbb{C}-\{0\}$ sobre $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$. Es claro que mediante la proyección canónica

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n$$

cada punto de $\mathbb{P}^n$ se identifica con un subespacio vectorial de dimensión uno de $\mathbb{C}^{n+1}$. Si $x \in \mathbb{P}^n$ se corresponde con el subespacio $\langle (x_0, \ldots, x_n) \rangle$, entonces lo denotaremos por $x = [x_0 : \ldots : x_n]$ y diremos que éstas son unas coordenadas homogéneas de x.

Provisto de la topología cociente por π, el espacio $\mathbb{P}^n$ se convierte en una variedad analítica compleja de dimensión n, compacta y simplemente conexa. Un atlas para $\mathbb{P}^n$ está dado por los abiertos (llamados abiertos afines) $U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$ junto con los homeomorfismos

$$U_i \to \mathbb{C}^n \qquad [x_0 : \ldots : x_n] \mapsto (x_0/x_i, \ldots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots, x_n/x_i).$$

Ejemplo 1.4. La línea proyectiva $\mathbb{P}^1$ es una superficie de Riemann compacta y simplemente conexa. En consecuencia es isomorfa a la esfera de Riemann; por ejemplo, mediante la correspondencia

$$[x : y] \mapsto \begin{cases} x/y & \text{si } y \neq 0 \\ \infty & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Sea $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ un polinomio en las indeterminadas $x_0, \ldots, x_n$ y con coeficientes complejos. Claramente no es posible usar f para definir una función en $\mathbb{P}^n$ dada la no unicidad de las coordenadas homogéneas. Sin embargo, si f fuese una forma homogénea, esto es, si

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \ldots, x_n) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} - \{0\},$$

para cierto $d \in \mathbb{Z}$, entonces tendría sentido escribir $\{x \in \mathbb{P}^n : f(x) = 0\}$.

DEFINICIÓN 6. Una curva algebraica proyectiva es el lugar común $C \subset \mathbb{P}^n$ de los ceros de una colección $\{f_\alpha\}$ de polinomios homogéneos de modo que en cada punto, C está descrita por $n-1$ polinomios

$$f_{\alpha_1} = \cdots = f_{\alpha_{n-1}} = 0.$$

Si la matriz jacobiana

$$J(f_{\alpha_1}, \ldots, f_{\alpha_{n-1}}) = \left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial x_j}\right) \in \mathrm{M}((n-1) \times (n+1), \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n])$$

no tiene rango maximal en un punto $x \in C$, entonces diremos que x es un punto singular de C. La curva es lisa o no-singular si carece de puntos singulares.

TEOREMA 1.5. *Cada curva algebraica proyectiva lisa y conexa es una superficie de Riemann compacta.*

La prueba del teorema anterior (ver, por ejemplo el primer capítulo de [**53**]) sigue esencialmente la misma idea del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.5. Consideremos la curva algebraica proyectiva conexa y lisa

$$C = \left\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : x^n + y^n + z^n = 0\right\}.$$

Las cartas locales

$$\begin{aligned}
\varphi_1 : U_1 = \{[x : y : z] \in C : x \neq 0\} \to \mathbb{C} \qquad & [x : y : z] \mapsto y/x \\
\varphi_2 : U_2 = \{[x : y : z] \in C : y \neq 0\} \to \mathbb{C} \qquad & [x : y : z] \mapsto z/y \\
\varphi_3 : U_3 = \{[x : y : z] \in C : z \neq 0\} \to \mathbb{C} \qquad & [x : y : z] \mapsto y/z
\end{aligned}$$

son compatibles. En efecto, en $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$ vale que

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(t) = \varphi_2([1 : t : h(t)]) = h(t)$$

donde h es una función holomorfa tal que $1 + t^n + (h(t))^n = 0$. En este ejemplo es directo determinar quién es h; en el caso general su existencia y holomorfía está garantizada por el Teorema de la Función Implícita. De forma análoga se verifica la compatibilidad de las otras cartas locales. Por ser un cerrado en un compacto se tiene que C es compacta.

Sea $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio irreducible de grado $d \geq 1$. Entonces f permite definir el conjunto

$$C' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : f(x, y) = 0\}$$

que es llamado la curva afín plana asociada a f. Si

$$F(x, y, z) := z^d f(x/z, y/z)$$

entonces f también da lugar a la curva algebraica proyectiva

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : F(x, y, z) = 0\}$$

que contiene a C' como el abierto $z \neq 0$. Nótese que C es una compactificación de C'. Si C tiene puntos singulares entonces es posible asociarle una nueva curva que carece de singularidades (su desingularización) y que por tanto es una superficie de Riemann compacta. En general, esta construcción es única módulo isomorfismo (ver, por ejemplo [**22**, Proposición 1.81]) y por tanto podemos hablar de la superficie de Riemann compacta definida por un polinomio irreducible $f \in \mathbb{C}[x, y]$ entendiendo que hablamos de su compactificación y desingularización.

Ejemplo 1.6. Sea $g \geq 2$ y $a_1, \ldots, a_{2g+2}$ números complejos distintos. La superficie de Riemann compacta inducida por el polinomio

$$y^2 - \prod_{k=1}^{2g+2}(x - a_k)$$

se llama hiperelíptica y tiene género g.

Definición 7. Sea S una superficie de Riemann. Un divisor de S es una función $D : S \longrightarrow \mathbb{Z}$ cuyo soporte es un subconjunto discreto de S. Denotaremos por $\mathrm{Div}(S)$ el grupo de todos los divisores de S.

Si S es compacta entonces el soporte es finito. Anotaremos

$$D = \sum_{p \in S} D(p) \cdot p$$

y definimos el grado de D como $\deg(D) = \sum_{p \in S} D(p)$.

Ejemplo 1.7. Denotaremos por $\mathcal{M}(S)$ el cuerpo de funciones meromorfas de una superficie de Riemann compacta S. Si $f \in \mathcal{M}(S) - \{0\}$, entonces podemos asociarle a f el divisor

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{p \in S} \mathrm{ord}_p f \cdot p$$

donde $\mathrm{ord}_p f$ denota el orden de f en p.

Definición 8. Una $1-$forma meromorfa sobre una superficie de Riemann provista de un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ es una colección de funciones meromorfas

$$\omega = \{f_i : U_i \to \mathbb{C}\}$$

de tal suerte que $f_i dz_i = f_j dz_j$ en $U_i \cap U_j$ donde el símbolo $dz_i/dz_j(p)$ denota la derivada de la función de transición $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ en $\varphi_i(p)$.

Ejemplo 1.8. Si f es una función meromorfa entonces df denota la $1-$forma meromorfa que en U_i luce como $(f \circ \varphi_i^{-1})'$.

Anotaremos $\omega = fdz$ entendiendo que $\omega|U_i = f_i dz_i$. Si todas las funciones f_i son holomorfas entonces ω es una $1-$forma holomorfa; todas ellas forman un espacio vectorial complejo que denotaremos por $H^{1,0}(S)$.

EJEMPLO 1.9. Sea S una superficie de Riemann compacta y ω una $1-$forma meromorfa no nula sobre S. Entonces

$$\mathrm{div}(\omega) = \sum_{p\in S} \mathrm{ord}_p\omega \cdot p$$

es un divisor, donde $\mathrm{ord}_p\omega$ es el orden de ω en p y está definido como $\mathrm{ord}_p f_i$ si $p \in U_i$. Un divisor de esta forma se llama divisor canónico.

Un divisor D sobre S es llamado efectivo si para cada $p \in S$ vale que $D(p) \geq 0$. Anotamos $D \geq 0$. Se define

$$L(D) = \{f \in \mathcal{M}(S) : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

el espacio vectorial complejo que contiene todas las funciones meromorfas de S cuyos polos están *acotados* por D. En efecto, si $n = D(p)$ y $f \in L(D)$ tiene un polo en p entonces éste tiene orden a lo sumo $-n$.

TEOREMA 1.6. *Sea S una superficie de Riemann compacta de género g. Entonces para cada divisor D se tiene que*

$$dim_{\mathbb{C}}\, L(D) - dim_{\mathbb{C}}\, L(K_S - D) = deg\,(D) + 1 - g$$

donde K_S denota cualquier divisor canónico.

El teorema anterior es conocido como el Teorema de Riemann-Roch. En [**20**, p. 71] se puede revisar su demostración desde un punto de vista analítico, mientras que una demostración desde un punto de vista algebraico puede hallarse en [**53**, p. 185]. Su importancia queda clara al conocer los resultados que se obtienen como consecuencia de él. En este trabajo sólo mencionaremos algunos de ellos.

Si $D = 0$ el teorema anterior implica que

$$\dim_{\mathbb{C}} L(K_S) = \dim_{\mathbb{C}} L(0) - \deg\,(0) - 1 + g = g$$

obteniendo que

$$L(K_S) = \{f \in \mathcal{M}(S) : \mathrm{div}(f) + K_S \geq 0\} \cong H^{1,0}(S)$$

es un espacio vectorial complejo de dimensión g.

Por otro lado, si $D = K_S$ el teorema anterior implica que

$$\dim_{\mathbb{C}} L(K_S) = \dim_{\mathbb{C}} L(0) + \deg\,(K_S) + 1 - g$$

obteniendo que $\deg(K_S)$ es $2g-2$. Esto nos dice que una $1-$forma holomorfa en una superficie de Riemann de género g tiene exactamente $2g-2$ ceros contados con multiplicidad.

Ejemplo 1.10. La superficie de Riemann compacta S inducida por el polinomio $y^2 = x^6 - 1$ tiene género dos y por tanto $H^{1,0}(S)$ tiene dimensión dos. En efecto, si $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ denotan las proyecciones en la primera y segunda coordenada entonces es posible verificar que

$$H^{1,0}(S) = \langle d\mathbf{x}/\mathbf{y}, \mathbf{x}d\mathbf{x}/\mathbf{y} \rangle.$$

Dos consecuencias relevantes del Teorema de Riemann-Roch son los siguientes corolarios, los cuales establecen que las superficies de Riemann de género $g \leq 1$ son curvas algebraicas proyectivas. Ver [**53**, p. 197].

Corolario 1.7. *Una superficie de Riemann compacta es de género cero si y sólo si es isomorfa a* $\mathbb{P}^1$.

Corolario 1.8. *Una superficie de Riemann compacta es de género uno si y sólo si es isomorfa a una cúbica no-singular en* $\mathbb{P}^2$.

Sea S una superficie de Riemann de género $g \geq 2$ y $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ una base del espacio vectorial de $1-$formas holomorfas $H^{1,0}(S)$. Siempre es posible escoger una base de tal suerte que sus elementos no tengan ceros comunes, induciendo una aplicación bien definida

$$\Phi : S \to \mathbb{P}^{g-1} \qquad z \mapsto [\omega_1(z) : \ldots : \omega_g(z)].$$

Si S es no-hiperelíptica entonces Φ es un isomorfismo sobre la imagen y por tanto S es isomorfa a la curva algebraica proyectiva $\Phi(S)$ en $\mathbb{P}^{g-1}$. Para los casos hiperelípticos se puede proceder de forma análoga pero utilizando $3-$formas holomorfas si $g = 2$ y $2-$formas holomorfas si $g \geq 3$. Ver, por ejemplo [**53**, p. 203].

Corolario 1.9. *Toda superficie de Riemann compacta es isomorfa a una curva algebraica proyectiva lisa y conexa.*

El Teorema 1.5 y el Corolario 1.9 proveen una equivalencia entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas proyectivas lisas y conexas. En todo lo que sigue utilizaremos indistintamente ambos conceptos.

1.3. Grupos Fuchsianos

Toda superficie de Riemann compacta de género mayor que uno se representa como el espacio de órbitas de $\mathbb{H}$ bajo la acción de un grupo adecuado de automorfismos de $\mathbb{H}$. En esta sección estudiaremos aquellos grupos que pueden aparecer.

Sea G un grupo de transformaciones de Möbius actuando sobre la esfera de Riemann por automorfismos:

$$G \times \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \qquad (g, z) \mapsto g \cdot z = g(z).$$

Denotaremos por $\Omega(G)$ al conjunto de todos los elementos de la esfera donde G actúa de forma propiamente discontinua, es decir, aquellos puntos z para los cuales existe una vecindad U tal que la condición

$$g(U) \cap U = \emptyset$$

se satisface para todos los elementos de G salvo un número finito; le llamaremos la región de discontinuidad de G.

Denotaremos por $\Lambda(G)$ el complemento de $\Omega(G)$ en la esfera y le llamaremos el conjunto límite de G. Este conjunto coincide con los puntos de acumulación de las órbitas de G.

Definición 9. Un grupo G de transformaciones de Möbius es kleiniano si su región de discontinuidad es no vacía.

Por identificarse con un grupo de matrices de formato 2×2, el grupo de automorfismos de la esfera de Riemann está provisto de la topología inducida por $\mathbb{C}^4$. Esta topología coincide con la dada por la convergencia uniforme en compactos.

Proposición 1.10. *Todo grupo kleiniano es discreto.*

Demostración. Si G no es discreto entonces existe una sucesión de elementos distintos g_n en G que convergen a la identidad; sigue que $g_n(z) \to z$ para cada z. De esta forma para cada entorno U de z el conjunto $g_n(U)$ interseca a U para infinitos valores de n y, por tanto, la región de discontinuidad de G es vacía. $\square$

El ejemplo emblemático de un grupo discreto que no es kleiniano es $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}[i])$ donde $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ es el anillo de los enteros de Gauss.

Si G es un grupo kleiniano y $z \in \Omega(G)$ entonces siempre existe una vecindad U de z de tal suerte que

$$\mathrm{stab}_G(z) = \{g \in G : g(U) \cap U \neq \emptyset\}.$$

Además, $\mathrm{stab}_G(z)$ consta sólo de la identidad y elementos elípticos resultando ser un grupo finito cíclico o bien el grupo trivial.

Recalcamos que si G es un grupo kleiniano, entonces su región de discontinuidad $\Omega(G)$ es un abierto $G-$invariante y, en consecuencia, se descompone en una colección a lo sumo numerable de componentes conexas: diremos que éstas son las componentes de G. Si Δ_i es una componente de G entonces denotamos por

$$G_i = \{g \in G : g(\Delta_i) = \Delta_i\}$$

el estabilizador de Δ_i en G. En general G_i es un subgrupo propio de G; si ocurre que $G = G_i$ entonces se dice que Δ_i es una componente invariante de G. Dos componentes Δ_i y Δ_j se dicen conjugadas si existe $g \in G$ tal que $\Delta_i = g(\Delta_j)$. Sea

$$\pi : \Omega(G) \to \Omega(G)/G = \oplus_i \Delta_i/G_i$$

la proyección canónica de paso al cociente.

TEOREMA 1.11. *El espacio $\Omega(G)/G$ tiene estructura de superficie de Riemann (disconexa) de modo que π es una aplicación holomorfa.*

En caso de que G no tenga elementos no triviales actuando con puntos fijos, π es un cubrimiento normal no ramificado y por tanto un homeomorfismo local. Sigue que las cartas locales están dadas por restricciones de π^{-1}. Si alguno de los estabilizadores es no trivial, digamos $\mathrm{stab}(z_0)$ de orden $k \geq 2$, entonces π es un cubrimiento normal ramificado. Se puede suponer que

$$\mathrm{stab}(z_0) = \langle z \mapsto \exp(2\pi i/k)\rangle \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$$

y entonces alrededor de un disco U centrado en z_0 la aplicación π luce como

$$z \mapsto w = z^k.$$

La función $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ sobre $\pi(U)$ sirve como carta local. Diremos que z_0 es un punto de ramificación y que su imagen es un valor de ramificación.

DEFINICIÓN 10. Un grupo kleiniano G es un grupo de tipo finito si:

(a) $\Omega(G)/G$ consiste en una colección finita de componentes.
(b) $\Omega(G) \to \Omega(G)/G$ ramifica sobre una colección finita de valores.
(c) Δ_i/G_i es una superficie de Riemann de tipo finito.

Un grupo kleiniano se llama no-elemental si su conjunto límite tiene al menos tres puntos. El siguiente teorema es conocido en la literatura como el Teorema de Finitud de Ahlfors. Ver [**46**, p. 58].

TEOREMA 1.12. *Sea G un grupo kleiniano no-elemental y finitamente generado. Entonces G es de tipo finito.*

Un círculo generalizado en la esfera de Riemann es un círculo euclideano o bien la unión de una línea euclideana con el punto del infinito. Un círculo generalizado determina dos subconjuntos disjuntos de la esfera; les llamaremos discos generalizados.

DEFINICIÓN 11. Un grupo kleiniano es fuchsiano si su conjunto límite está contenido en un círculo generalizado C de la esfera de Riemann y deja invariante cada uno de los discos generalizados que determina C.

Dos círculos generalizados distinguidos son la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}} = \partial\mathbb{H}$ y el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \partial\Delta$. Si C no es una de estas opciones entonces, después de conjugar por una transformación de Möbius adecuada, se puede suponer sí lo es. Es por esta razón que en todo lo que sigue siempre pensaremos en los grupos fuchsianos como subgrupos de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ o bien de $\mathrm{Aut}(\Delta)$; en tal caso también se dice que están normalizados.

Además, nos interesan los grupos fuchsianos del primer tipo (es decir, aquéllos que satisfacen $\Lambda(G) = C$) y que son finitamente generados porque éstos uniformizan superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico, esto es, de tipo (g, n) con $2g-2+n > 0$. Nótese que la condición anterior sólo excluye los casos bien estudiados $(0,0), (0,1), (0,2)$ y $(1,0)$.

Supongamos que G es un grupo fuchsiano del primer tipo, finitamente generado y con torsión actuando sobre $\mathbb{H}$. Denotamos por $\mathbb{H}_G$ el complemento en $\mathbb{H}$ de los puntos fijos de elementos no triviales de G. Entonces la proyección

$$\pi : \mathbb{H}_G \to \mathbb{H}_G/G$$

es un cubrimiento normal no ramificado y $\mathbb{H}_G/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito $(g, m+n)$ donde

$$\mathbb{H}/G = \mathbb{H}_G/G \cup \{p_1, \dots, p_m\}$$

y cada p_j corresponde a una clase de conjugación en G de un subgrupo cíclico maximal de orden $2 \le v_j < \infty$. Las demás n pinchaduras corresponden a clases de conjugación de subgrupos cíclicos infinitos maximales de elementos parabólicos. Notamos que $\mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito (g, n) con m puntos distintiguidos.

Definición 12. Con las notaciones anteriores, diremos que G tiene signatura

$$s(G) = (g; v_1, \dots, v_m, \infty, \overset{n}{\dots}, \infty)$$

y que el cociente $\mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito con puntos cónicos. Este último objeto también se conoce en la literatura como una orbifold de Riemann.

Ejemplo 1.11. La acción de $G = \langle a(z) = -1/z, b(z) = z+1\rangle$ sobre $\mathbb{H}$ tiene a i y $\rho = \exp(2\pi i/3)$ como puntos fijos de elementos no triviales. La aplicación

$$\mathbb{H}_G = \mathbb{H} - \{G\text{-órbitas de } i, \rho\} \to \mathbb{H}_G/G$$

es un cubrimiento no ramificado y $\mathbb{H}_G/G$ es una superficie de Riemann de tipo $(0, 2+1)$. En efecto, no es difícil ver que ∞ representa la clase de conjugación del grupo cíclico de orden infinito generado por b mientras que i y ρ representan clases de conjugación de grupos cíclicos finitos de órdenes 2 y 3 generados por a y ab. La signatura de G es $(0; 2, 3, \infty)$.

En la literatura el grupo del ejemplo anterior se conoce como el grupo modular. Este grupo reúne todas las transformaciones de Möbius con entradas enteras y por tanto es isomorfo a $\mathbb{P}\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$.

El siguiente resultado es conocido como el Lema de Selberg. Ver [**58**].

PROPOSICIÓN 1.13. *Sea G un grupo finitamente generado de transformaciones de Möbius. Entonces G contiene un subgrupo normal de índice finito que es libre de torsión.*

PROPOSICIÓN 1.14. *Sean G_1 y G_2 dos grupos fuchsianos sin torsión. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *G_1 y G_2 son grupos conjugados en $Aut(\mathbb{H})$.*
(b) *$\mathbb{H}/G_1$ y $\mathbb{H}/G_2$ son superficies de Riemann isomorfas.*

Si admitimos torsión la proposición anterior sigue siendo cierta pero reemplazando la parte (b) por orbifolds de Riemann.

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por $\pi_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/G_i$ las proyecciones de paso al cociente. Un isomorfismo $f : \mathbb{H}/G_1 \to \mathbb{H}/G_2$ se levanta a un automorfismo f' de $\mathbb{H}$ de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H} \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathbb{H} \arrow[d, "\pi_2"] \\ \mathbb{H}/G_1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{H}/G_2 \end{tikzcd}$$

conmuta. La conmutatividad del diagrama equivale a que f' conjugue G_1 en G_2. Al revés, si G_1 y G_2 son conjugados por $h : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, entonces la regla $[z]_{G_1} \mapsto [h(z)]_{G_2}$ es un isomorfismo entre $\mathbb{H}/G_1$ y $\mathbb{H}/G_2$. $\square$

1.4. Automorfismos y Acciones de Grupos

En esta sección haremos un breve repaso sobre automorfismos y acciones de grupos en superficies de Riemann compactas.

DEFINICIÓN 13. Sea $f : S_1 \to S_2$ una aplicación holomorfa no-constante entre superficies de Riemann compactas y $p \in S_1$. Se define la multiplicidad de f en p como el único entero $k \geq 1$ para el cual existen cartas locales para p y $f(p)$ respectivamente tal que f luzca como

$$w = f(z) = z^k$$

en un entorno de p. Anotamos $\mathrm{mult}_p(f) = k$.

Si ocurre que $\mathrm{mult}_p(f) \geq 2$ entonces diremos que p y $f(p)$ son punto y valor de ramificación de f respectivamente. La compacidad implica que sólo existe un número finito de ellos. Si f carece de puntos de ramificación entonces f es un cubrimiento. Es por esta razón que usualmente se habla de cubrimientos ramificados y no ramificados.

Se define el grado de f mediante

$$\deg(f) = \sum_{f(p)=q} \operatorname{mult}_p(f)$$

para q fijo. Esta cantidad es independiente de la elección de q; ver, por ejemplo [**53**, p. 47].

Sea G un grupo abstracto y finito. Se dice que G actúa holomórficamente sobre una superficie de Riemann compacta S si existe un homomorfismo de grupos

$$\Phi : G \to \operatorname{Aut}(S).$$

Si G actúa con núcleo $K = \ker(\Phi)$ entonces es fácil ver que el grupo cociente G/K actúa con exactamente las mismas órbitas. Es por esta razón que supondremos siempre que las acciones son inyectivas y por tanto pensaremos en G como un grupo de automorfismos de S.

Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos. Entonces G siempre actúa de forma propiamente discontinua sobre S pero eventualmente con puntos fijos. Nos proponemos dotar de estructura de superficie de Riemann al cociente S/G. El siguiente lema nos dice cómo construir cartas locales para el cociente.

Lema 1.15. *Sea S una superficie de Riemann compacta y G un grupo finito de automorfismos de S. Entonces para cada $p \in S$ existe un entorno $U_p \subset S$ tal que:*

(a) *U_p es precisamente invariante por $stab_G(p)$.*
(b) *ningún otro punto de U_p es fijo por elementos de $stab_G(p)$.*
(c) *la aplicación natural*

$$\alpha : U_p/stab_G(p) \to S/G$$

es un homeomorfismo sobre un abierto W de S/G.

Supongamos que $p \in S$ con $\operatorname{stab}_G(p)$ trivial. Entonces la aplicación α del lema anterior asegura la existencia de un homeomorfismo $\alpha^{-1} : W \to U_p$ desde un entorno de $[p] \in S/G$. Achicando si fuese necesario el abierto U_p se puede suponer que éste es el dominio de una carta local $\varphi : U_p \to \mathbb{C}$ de S y de esta forma

$$\varphi \circ \alpha^{-1} : W \to \mathbb{C}$$

es una carta local para $[p]$.

Supongamos que $p \in S$ con $\mathrm{stab}_G(p)$ de orden $m \geq 2$. Si z denota una carta local centrada de p entonces la aplicación

$$h : U_p \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto \prod g(z)$$

(donde la productoria se toma sobre los elementos de $\mathrm{stab}_G(p)$) tiene multiplicidad m en p, es holomorfa y es $\mathrm{stab}_G(p)-$invariante. En consecuencia desciende al cociente para definir un homeomorfismo

$$h' : U_p/\mathrm{stab}_G(p) \to \mathbb{C}$$

sobre un abierto V de $\mathbb{C}$. De esta forma la composición

$$h' \circ \alpha^{-1} : W \to U_p/\mathrm{stab}_G(p) \to V \subset \mathbb{C}$$

es una carta local para $[p]$.

Resumimos lo anterior con el siguiente teorema.

Teorema 1.16. *Sea G grupo finito de automorfismos de una superficie de Riemann compacta S. Entonces S/G admite estructura de superficie de Riemann de tal suerte que la proyección natural*

$$\pi : S \to S/G$$

es una aplicación holomorfa de grado igual al orden de G. Además, la multiplicidad de π en $p \in S$ coincide con el orden de su estabilizador.

Sea $f : S_1 \to S_2$ un cubrimiento de grado $d \geq 1$ ramificado en los valores $y_1, \ldots, y_n \in S_2$. Si $y_0 \in S_2$ es un valor regular de f, entonces definimos el homomorfismo de monodromía de f mediante

$$\Theta(f) : \pi_1(S_2 - \{y_1, \ldots, y_n\}, y_0) \to \mathrm{Biy}(f^{-1}(y_0))$$
$$\gamma \mapsto \Theta(f)(\gamma) = \sigma_\gamma^{-1}$$

donde σ_γ se define de la siguiente manera. Dado un lazo γ basado en y_0, éste se levanta a una curva en S_1 cuyos puntos inicial x y final x' están en la fibra sobre y_0. En tal caso $\sigma_\gamma(x) = x'$.

Por comodidad podemos enumerar los puntos en la fibra sobre y_0 para pensar en el homomorfismo de monodromía como

$$\Theta(f) : \pi_1(S_2 - \{y_1, \ldots, y_n\}, y_0) \to \mathbf{S}_d.$$

La imagen $\mathrm{M}(f)$ de $\pi_1(S_2 - \{y_1, \ldots, y_n\}, y_0)$ en $\mathbf{S}_d$ es lo que se conoce como la monodromía de f. Es posible verificar que este grupo está definido, módulo conjugaciones en $\mathbf{S}_d$, independientemente de la numeración y del punto base escogido.

Teorema 1.17. *Sean $f_1 : S_1 \to S$ y $f_2 : S_2 \to S$ dos cubrimientos del mismo grado d y ramificados sobre los mismos valores. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$M(f_1)$ y $M(f_2)$ son conjugados en $\mathbf{S}_d$.*
(b) *Existe un isomorfismo de superficies de Riemann $\varphi : S_1 \to S_2$ de tal suerte que $f_2 \circ \varphi = f_1$.*

La prueba del teorema anterior puede encontrarse, por ejemplo, en [**22**, p. 153]. Una consecuencia relevante de este teorema es la siguiente.

Observación 1. *Una vez fijado d y un subconjunto finito B de una superficie de Riemann S, existe sólo una cantidad finita, módulo equivalencia, de cubrimientos $S_1 \to S$ de grado d ramificados en B.*

El siguiente teorema es conocido en la literatura como la Fórmula de Riemann-Hurwitz. Ver [**20**, p. 19].

Teorema 1.18. *Sean S_1 y S_2 dos superficies de Riemann compactas de géneros g_1 y g_2 respectivamente y $f : S_1 \to S_2$ una aplicación holomorfa no-constante. Entonces*

$$2g_1 - 2 = deg(f)(2g_2 - 2) + B$$

donde $B = \sum_{p \in S_1}(mult_p(f) - 1)$ es el número de ramificación de f.

Ejemplo 1.12. Sea S la superficie de Riemann compacta dada por $x^n + y^n + z^n = 0$ en $\mathbb{P}^2$ y $f : S \to \mathbb{P}^1$ la aplicación de grado n dada por $[x : y : z] \mapsto [x : y]$. La aplicación f ramifica sobre $[x_0 : y_0]$ si y sólo si

$$f^{-1}([x_0 : y_0]) = \{[x_0 : y_0 : z] \in \mathbb{P}^2 : x_0^n + y_0^n + z^n = 0\}$$

tiene cardinalidad menor que n. Esto ocurre solamente cuando $x_0^n + y_0^n = 0$ y de esta forma f ramifica en los n puntos $[\zeta : 1 : 0]$ tal que $\zeta^n = -1$ con multiplicidad n en cada uno de ellos. La fórmula de Riemann-Hurwitz implica que

$$2g_S - 2 = n(2 \cdot 0 - 2) + n(n-1)$$

obteniendo que

$$g_S = \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Observación 2. *Si el cubrimiento f es normal, esto es, dado por la acción de un grupo finito G y $\{p_1, \ldots, p_n\}$ es un conjunto de puntos fijos de G donde cada p_i es un representante de una órbita distinta y todas las órbitas están representadas, entonces se tiene que*

$$B = |G| \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right)$$

donde m_i es el orden del estabilizador $stab_G(p_i)$.

Ejemplo 1.13. La fórmula de Riemann-Hurwitz permite determinar todos los grupos finitos no triviales que actúan en la esfera de Riemann.

Signatura	Orden	Grupo
$(0; n, n)$	n	$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$(0; 2, 2, n)$	$2n$	$\mathbb{D}_n$
$(0; 2, 3, 3)$	12	$\mathcal{A}_4$
$(0; 2, 3, 4)$	24	$\mathbf{S}_4$
$(0; 2, 3, 5)$	60	$\mathcal{A}_5$

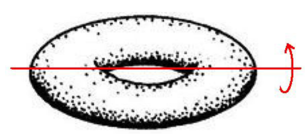
EJEMPLO 1.14. Consideremos la superficie de Riemann $C(\lambda)$ de género uno definida en el plano proyectivo como la curva algebraica proyectiva

$$\{y^2 z = x(x-z)(x-\lambda z)\} \subset \mathbb{P}^2$$

para $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$. Si $z = 0$ obtenemos únicamente el punto $p = [0 : 1 : 0]$ mientras que en el abierto afín $z \neq 0$ la curva $C(\lambda)$ luce como

$$\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \subset \mathbb{C}^2$$

La aplicación $\pi : C(\lambda) \to \mathbb{C}$ definida por $\pi(x, y) = x$ tiene grado dos y ramifica sobre los valores $\{0, 1, \lambda\}$ además del ∞ cuya única preimagen es p. El grupo de transformaciones de π es $G = \langle (x, y) \mapsto (x, -y) \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y puede interpretarse como la rotación de $C(\lambda)$ a lo largo de un eje imaginario con cuatro puntos fijos como ilustra la siguiente figura.



El Teorema 1.16 nos dice que el cociente $C(\lambda)/G$ tiene estructura de superficie de Riemann, mientras el Teorema 1.18 asegura que su género es cero. En efecto, se tiene que

$$1 = 1 + 2(g-1) + 4 \cdot (1 - 1/2) \implies g = 0$$

y luego $C(\lambda)/G$ se identifica con la esfera de Riemann con cuatro puntos de ramificación de índice dos. En el lenguaje de la Definición 12 se tiene que $C(\lambda)/G$ es una orbifold de Riemann y si $C(\lambda)/G \cong \mathbb{H}/\Gamma$ entonces su grupo uniformizante Γ tiene signatura $(0; 2, 2, 2, 2)$.

Sea S una superficie de Riemann compacta, Γ un grupo fuchsiano tal que $S = \mathbb{H}/\Gamma$ y

$$N(\Gamma) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}) : \varphi \Gamma \varphi^{-1} = \Gamma\}$$

su normalizador en $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$. Cada $\varphi \in N(\Gamma)$ induce un automorfismo φ' de S mediante la regla

$$\varphi'([z]_\Gamma) = [\varphi(z)]_\Gamma.$$

La correspondencia

$$N(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(S) \qquad \varphi \mapsto \varphi'$$

induce un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es Γ. Como cada automorfismo de S se levanta a un automorfismo de $\mathbb{H}$ que normaliza Γ, se tiene que

$$\mathrm{Aut}(S) \cong N(\Gamma)/\Gamma.$$

TEOREMA 1.19. *Sea S una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Entonces su grupo de automorfismos es finito y*

$$|Aut(S)| \leq 84(g-1).$$

La cota se obtiene estudiando el cubrimiento $S \to S/\mathrm{Aut}(S)$. Ver, por ejemplo [**20**, p. 242]. El siguiente resultado caracteriza las acciones de grupos sobre superficies de Riemann.

PROPOSICIÓN 1.20. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(a) *Un grupo abstracto G actúa como grupo de automorfismos de $S = \mathbb{H}/K$.*
(b) *$G \cong \Gamma/K$ para algún grupo fuchsiano Γ que contiene a K como subgrupo normal de índice $|G|$.*
(c) *Existe un homomorfismo de grupos sobreyectivo $\Theta : \Gamma \to G$ cuyo núcleo es K.*

EJEMPLO 1.15. Sean $p, r \geq 2$ con p primo, r par y Γ el grupo fuchsiano generado por los elementos hiperbólicos a_1, a_2, b_1, b_2 y los elementos elípticos $c_1, \ldots, c_r$ junto con las relaciones

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdot a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdot c_1 \cdots c_r = c_1^p = \cdots = c_r^p = 1.$$

El homomorfismo $\Theta : \Gamma \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ dado por

$$a_1, a_2, b_1, b_2 \mapsto 0, c_{2i} \mapsto 1, c_{2i-1} \mapsto p-1 \quad 1 \leq i \leq r/2$$

es sobreyectivo. Sigue que $K := \ker(\Theta)$ unifomiza una superficie de Riemann compacta S admitiendo una acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de tal suerte que el cociente es una superficie de Riemann de género dos con r puntos cónicos de orden p. Como $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ es cíclico lo mismo nos dice que S tiene un automorfismo de orden p con r puntos fijos. El género de S es $g = p + 1 + r(p-1)/2$.

Si los elementos c_i son parabólicos entonces el mismo homomorfismo de grupos justifica la existencia de una superficie de Riemann S admitiendo una acción de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de tal suerte que el cociente es una superficie de Riemann de tipo finito $(2, r)$.

CAPÍTULO 2

El Espacio de Teichmüller

En este capítulo describiremos en detalle el espacio de Teichmüller asociado a una superficie de Riemann. Seguiremos las notaciones de [**57**].

2.1. Aplicaciones casi-conformales

Sea X una superficie real orientada de clase C^∞ provista de una métrica riemanniana $ds^2 = adx^2+2bdxdy+cdy^2$. En coordenadas locales complejas $z = x+iy$ y $\overline{z} = x-iy$ la métrica puede ser expresada mediante

$$ds^2 = \lambda(z)|dz + \mu(z)d\overline{z}|^2$$

donde

$$\lambda := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a+c) - \sqrt{ac-b^2}\right)$$

es una función a valores reales positivos y

$$\mu := \frac{a-c+2ib}{a+c+2\sqrt{ac-b^2}}$$

es una función a valores complejos dentro del disco unitario.

Sea

$$f : U \subset X \to V \subset \mathbb{C} \qquad (x,y) \mapsto w = f(x,y)$$

un difeomorfismo definido en un abierto U de X. Dotamos a U de la métrica ds^2 y a V de la métrica euclideana. Recordamos que f es conformal si y sólo si preserva la medida de los ángulos y la orientación. En nuestro caso se tiene que:

(a) f preserva la medida de los ángulos si $|ds|$ y $|dw|$ son proporcionales en todo punto.
(b) f preserva la orientación si el jacobiano de f no cambia de signo en U.

Nótese que

$$|dw| = |f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}| \sim |dz + (f_{\overline{z}}/f_z)\, d\overline{z}|$$

y de esta forma, la conformalidad equivale a

$$f_{\overline{z}}(z) = \mu(z) f_z(z)$$

y $J(f)(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 > 0$ para todo $z \in U$.

En lo que sigue supondremos que todas las aplicaciones preservan la orientación.

Definición 14. Sea $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{C}$. Se define la dilatación compleja de f en z mediante

$$\mu_f(z) = \frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}.$$

Ejemplo 2.1. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. La dilatación compleja de la aplicación

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto az + b\overline{z}$$

es $\mu_f(z) = b/a$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Sea $u = e^{i\theta}$ un vector unitario en el plano complejo y f un difeomorfismo entre dominios del plano complejo. Entonces

$$\partial_u f(z_0) = f_z(z_0)e^{i\theta} + f_{\overline{z}}(z_0)e^{-i\theta}$$

donde $\partial_u f(z_0)$ denota la derivada direccional de f en z_0 en la dirección de u. Sigue que

$$\text{máx}\,|\partial_u f(z_0)| = |f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)| \qquad \text{mín}\,|\partial_u f(z_0)| = |f_z(z_0)| - |f_{\overline{z}}(z_0)|$$

y por tanto el cociente

$$K(f)(z_0) := \frac{\text{máx}\,|\partial_u f(z_0)|}{\text{mín}\,|\partial_u f(z_0)|} = \frac{1 + |\mu_f(z_0)|}{1 - |\mu_f(z_0)|}$$

depende sólo de la dilatación compleja $\mu_f(z_0)$ de f en z_0.

Si $a = \partial f/\partial z(z_0)$ y $b = \partial f/\partial \overline{z}(z_0)$ entonces la derivada

$$f'(z_0) : z \mapsto az + b\overline{z}$$

de f en z_0 tiene la misma forma que la aplicación del Ejemplo 2.1. Nótese que $K(f)(z_0)$ coincide con el cociente entre el semieje mayor y el semieje menor de la elipse imagen por $f'(z_0)$ del círculo unitario $\mathbb{S}^1$.

Definición 15. Se dice que un difeomorfismo $f : U \subset \mathbb{C} \to V \subset \mathbb{C}$ es casi-conformal si la función

$$K(f) : U \to \mathbb{R}$$

está acotada en U. Equivalentemente, si

$$\sup_{z \in U} |\mu_f(z)| < 1.$$

Las aplicaciones casi-conformales son una generalización de las conformales. En efecto, la casi-conformalidad de un difeomorfismo se traduce en el envío de círculos infinitesimales en elipses infinitesimales con excentricidad controlada (y no sólo círculos, como en el caso conformal).

EJEMPLO 2.2. La aplicación

$$f:\Delta\to\mathbb{C}\qquad z\mapsto\frac{z}{1-z\overline{z}}$$

no es casi-conformal. En efecto, su dilatación compleja es

$$\mu_f(z)=\frac{f_{\overline{z}}(z)}{f_z(z)}=\frac{z^2/(1-z\overline{z})^2}{1/(1-z\overline{z})^2}=z^2\implies\sup_{z\in\Delta}|\mu(z)|=1.$$

Más adelante veremos que Δ y $\mathbb{C}$ no son casi-conformalmente equivalentes.

Una definición más cómoda y general que la Definición 15 para homeomorfismos casi-conformales es la siguiente.

DEFINICIÓN 16. Sea $f:U\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un homeomorfismo. Entonces f es casi-conformal si:

(a) f tiene derivadas distribucionales locales L^1-integrables y
(b) f resuelve una ecuación de Beltrami

$$f_{\overline{z}}=\mu f_z$$

casi siempre en U para alguna función μ en $L^\infty(U)$ satisfaciendo

$$||\mu||_\infty<1.$$

PROPOSICIÓN 2.1. *Sean f,g homeomorfismos casi-conformales. Entonces*

$$\mu_{g\circ f^{-1}}(f(z))=\frac{f_z(z)}{\overline{f_z(z)}}\cdot\frac{\mu_g(z)-\mu_f(z)}{1-\overline{\mu_f(z)}\mu_g(z)}\tag{2.1}$$

DEMOSTRACIÓN. Nótese que para el caso diferenciable la proposición anterior no es más que la regla de la cadena. Ver [**48**, p. 31] para un caso más general. ☐

Si en (2.1) tomamos g como la función identidad entonces

$$\mu_{f^{-1}}(f(z))=-\frac{f_z(z)}{\overline{f_z(z)}}\cdot\mu_f(z)$$

porque $\mu_g=0$ y en particular vale que $||\mu_f||_\infty=||\mu_{f^{-1}}||_\infty$.

PROPOSICIÓN 2.2. *f es casi-conformal si y sólo si f^{-1} lo es.*

Más generalmente, si g es una aplicación holomorfa entonces

$$\mu_{g\circ f^{-1}}(f(z))=-\frac{f_z(z)}{\overline{f_z(z)}}\cdot\mu_f(z)=\mu_{f^{-1}}(f(z)),$$

es decir, la dilatación compleja no cambia al componer por la izquierda por una aplicación holomorfa. Análogamente, si f es holomorfa entonces

$$\mu_{g\circ f^{-1}}(f(z)) = \frac{\overline{f_z(z)}}{f_z(z)} \cdot \mu_g(z).$$

Además si f y g son casi-conformales, entonces (2.1) implica que

$$||\mu_{g\circ f^{-1}}||_\infty < 1$$

y por tanto la casi-conformalidad es cerrada por composiciones.

PROPOSICIÓN 2.3. *Las aplicaciones casi-conformales forman un grupo con la composición.*

Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto. Denotaremos por

$$L_1^\infty(U) = \{\mu : U \to \mathbb{C} \text{ medible} : ||\mu||_\infty < 1\}$$

la bola unitaria en el espacio de Banach $L^\infty(U)$.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sean f y g dos homeomorfismos casi-conformales definidos en un dominio U satisfaciendo la misma ecuación de Beltrami*

$$w_{\overline{z}} = \mu w_z$$

para cierto $\mu \in L_1^\infty(U)$. Entonces $f \circ g^{-1}$ y $g \circ f^{-1}$ son biholomorfismos. Recíprocamente, si f es solución de la ecuación, entonces $\varphi \circ f$ también lo es para cada φ holomorfa.

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia directa de (2.1) porque h es un biholomorfismo si y sólo si $\mu_h = 0$. □

Sea f un homeomorfismo casi-conformal de $\mathbb{C}$ con dilatación compleja μ. Por la proposición anterior podemos suponer que f fija 0 y 1. Ahora extendemos f al ∞ de modo que éste fije $0, 1$ y ∞. Cuando una homeomorfismo f es elegido de esta manera se dice que está normalizado.

TEOREMA 2.5. *Sea $\mu \in L_1^\infty(\mathbb{C})$. Existe un único homeomorfismo casi-conformal normalizado W_μ de la esfera de Riemann en sí misma cuya dilatación compleja es μ. Más aún, para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ fijo, la función*

$$L_1^\infty(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \qquad \mu \mapsto W^\mu(z_0)$$

es holomorfa.

El teorema anterior es fundamental pues en él se basa toda la teoría analítica de Teichmüller; éste asegura la existencia y unicidad de soluciones normalizadas de la ecuación de Beltrami. En la literatura este resultado se conoce como el Teorema de Ahlfors-Bers (ver [**1**]); su demostración también puede verse en [**57**, p. 34].

Un elemento $\mu \in L_1^\infty(\mathbb{H})$ puede ser extendido a $L_1^\infty(\mathbb{C})$ de dos formas naturales:

(a) extendiendo μ como nula al semiplano inferior

$$\begin{cases} \mu(z) & z \in \mathbb{H} \\ 0 & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

y por tanto, según el Teorema 2.5, obteniendo un único homeomorfismo casi-conformal normalizado de la esfera de Riemann en sí misma con dilatación compleja μ en $\mathbb{H}$ y holomorfo en $\mathbb{L}$. En lo sucesivo lo denotaremos por w^μ.

(b) extendiendo μ por simetría al semiplano inferior

$$\begin{cases} \mu(z) & z \in \mathbb{H} \\ \overline{\mu(\overline{z})} & z \in \mathbb{L} \end{cases}$$

y por tanto, según el Teorema 2.5, obteniendo un único homeomorfismo casi-conformal normalizado de la esfera de Riemann en sí misma que deja invariante $\mathbb{H}$ y con dilatación compleja μ en $\mathbb{H}$. En lo sucesivo lo denotaremos por w_μ.

Proposición 2.6. *Cada homeomorfismo casi-conformal de $\mathbb{H}$ en sí mismo se extiende continuamente al borde $\partial\mathbb{H}$.*

La proposición anterior nos dice que $w_\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ es el único homeomorfismo casi-conformal de $\mathbb{H}$ con dilatación compleja μ cuya extensión al borde $\partial\mathbb{H}$ fija $0, 1$ y ∞.

Corolario 2.7. *El disco unitario y el plano complejo no son casi conformalmente equivalentes.*

Demostración. Si existiese un homeomorfismo casi-conformal $f : \Delta \to \mathbb{C}$ con dilatación compleja μ entonces el Teorema 2.5 implicaría que $f^{-1} \circ w^\mu : \mathbb{C} \to \Delta$ es un isomorfismo. Esto contradice el Teorema de Liouville. □

Definición 17. Sea $f : S \to S'$ un homeomorfismo entre dos superficies de Riemann. Diremos que f es casi-conformal si cualquier expresión local de f es casi-conformal.

Supongamos que elegimos dos cartas locales ψ_1 y ψ_2 para $f(p)$ en las cuales f luce como $f_1 := \psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}$ y $f_2 := \psi_2 \circ f \circ \varphi^{-1}$. Entonces

$$\psi_{12} \circ f_1 = f_2$$

donde $\psi_{12} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ es holomorfa y así, (2.1) implica que

$$\mu_{f_2} = \mu_{\psi_{12} \circ f_1} = \mu_{f_1}.$$

Análogamente, si ahora elegimos dos cartas locales φ_1 y φ_2 para p en las cuales f luce como $f_1 := \psi \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ y $f_2 := \psi \circ f \circ \varphi_2^{-1}$, entonces

$$f_2 \circ \varphi_{12} = f_1$$

donde $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es holomorfa. Sigue entonces por (2.1) que

$$\mu_{f_1} = \mu_{f_2 \circ \varphi_{12}} = \frac{(\overline{\varphi_{12}})_z}{(\varphi_{12})_z} \mu_{f_2} \circ \varphi_{12}.$$

Lo anterior nos dice que para aplicaciones casi-conformales entre superficies de Riemann la dilatación compleja no está bien definida como una función.

Definición 18. Una $(p,q)-$forma diferencial sobre una superficie de Riemann S es una asignación de una función μ de clase L^∞ por cada carta local z de S de tal suerte que la cantidad

$$\mu(z)(dz)^p(d\overline{z})^q$$

permanezca invariante por cambios de coordenadas. Denotaremos por $L^\infty(p,q)(S)$ el conjunto de las $(p,q)-$formas diferenciales sobre S.

Sigue que si $f : S \to S'$ es una aplicación casi-conformal entonces

$$\mu_f \in L^\infty(-1,1)(S).$$

Sea G un grupo kleiniano y f un homeomorfismo casi-conformal de la esfera de Riemann en sí misma. No es difícil verificar que el conjunto

$$fGf^{-1} = \{fgf^{-1} : g \in G\}$$

es también un grupo de homeomorfismos casi-conformales de la esfera de Riemann en sí misma. Si ocurre que fGf^{-1} es un grupo de transformaciones de Möbius, entonces diremos que f y G son compatibles.

Proposición 2.8. *Sea G un grupo kleiniano con región de discontinuidad Ω y f un homeomorfismo casi-conformal compatible con G. Entonces fGf^{-1} es un grupo kleiniano con región de discontinuidad $f(\Omega)$.*

Demostración. Si G actúa de forma propiamente discontinua en z_0, digamos con U como buena vecindad, entonces fGf^{-1} actúa de forma propiamente discontinua en $f(z_0)$ con $f(U)$ como buena vecindad. $\square$

Proposición 2.9. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *f es compatible con G.*

(b) *$\mu = \mu_f$ es compatible con G, esto es, para cada $g \in G$ la igualdad*

$$(\mu \circ g) \cdot \overline{g'}/g' = \mu$$

vale casi siempre en $\overline{\mathbb{C}}$.

Demostración. Es consecuencia directa de (2.1). □

Sea G un grupo fuchsiano actuando en $\mathbb{H}$. Definimos el espacio de los coeficientes de Beltrami de G como

$$L_1^\infty(\mathbb{H}, G) = \{\mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}) : \mu \,\text{es compatible con}\, G\}.$$

Para cada μ en $L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$ tenemos dos grupos asociados y abstractamente isomorfos:

(a) Como w^μ es compatible con G entonces

$$G^\mu := w^\mu G(w^\mu)^{-1} = \{g^\mu := w^\mu g(w^\mu)^{-1} : g \in G\}$$

es un grupo kleiniano cuya región de discontinuidad es $w^\mu(\mathbb{H})$. Diremos que G^μ es una deformación casi-conformal de G o un grupo casi-fuchsiano y que $w^\mu(\mathbb{H})$ es un casi-disco.

(b) Como w_μ es compatible con G entonces

$$G_\mu := w_\mu G(w_\mu)^{-1} = \{g_\mu := w_\mu g(w_\mu)^{-1} : g \in G\}$$

es un grupo kleiniano cuya región de discontinuidad es $\mathbb{H}$, esto es, G_μ es un grupo fuchsiano.

Sea G un grupo fuchsiano tal que $S = \mathbb{H}/G$ sea una superficie de Riemann. Para G y S tenemos dos espacios bien definidos:

(a) $L^\infty(\mathbb{H}, G)$ de las funciones medibles L^∞ compatibles con G.
(b) $L^\infty(-1,1)(S)$ de las $(-1,1)-$formas diferenciales sobre S.

Resulta claro que

$$L^\infty(\mathbb{H}, G) \cong L^\infty(-1,1)(S)$$

porque los cambios de coordenadas en S son los elementos del grupo G.

Supongamos que $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es la estructura compleja de S y $\mu \in L_1^\infty(-1,1)(S)$. Por el Teorema 2.5 para cada α existe un homeomorfismo casi-conformal $w_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}$ cuya dilatación compleja es μ. De esta forma, el conjunto $\{(U_\alpha, w_\alpha)\}$ es un nuevo atlas para S porque sus funciones de transición son holomorfas por (2.1); la denotaremos por S_μ.

Teorema 2.10. *Sea $S \cong \mathbb{H}/G$ una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico y $\mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$. Entonces*

$$S_\mu \cong \mathbb{H}/G_\mu \cong w^\mu(\mathbb{H})/G^\mu.$$

Demostración. Sea $f_\mu : S \cong \mathbb{H}/G \to \mathbb{H}/G_\mu$ el homeomorfismo inducido por w_μ. Como $id : S \to S_\mu$ es $\mu-$casi-conformal se tiene que $f_\mu \circ id^{-1} : S_\mu \to \mathbb{H}/G_\mu$ es un isomorfismo por (2.1). Similarmente se prueba que $S_\mu \cong w^\mu(\mathbb{H})/G^\mu$. □

2.2. El Espacio de Teichmüller

Sea S una superficie de Riemann de tipo finito (g, n).

Definición 19. Diremos que el par (S', f') es un marking sobre S si S' es una superficie de Riemann y $f' : S \to S'$ es un homeomorfismo casi-conformal. Denotaremos por $M'(S)$ el conjunto que reúne todos los markings sobre S.

Dos markings (S_1, f_1) y (S_2, f_2) están relacionados si existe un isomorfismo de superficies de Riemann $h : S_1 \to S_2$ de tal suerte que $f_2^{-1} h f_1$ sea homotópicamente trivial. Equivalentemente, si el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
S_1 \arrow[rr, "h"] & & S_2
\end{tikzcd}
$$

conmuta módulo homotopía. Anotamos $(S_1, f_1) \simeq (S_2, f_2)$ y no es difícil chequear que $\simeq$ es una relación de equivalencia.

Si dos pares son equivalentes por $\simeq$ entonces diremos que ellos son Teichmüller equivalentes. Denotaremos por $[(S_1, f_1)]$ la clase de (S_1, f_1).

Definición 20. Se define el espacio de Teichmüller de S como el conjunto de clases de equivalencia de markings sobre S, esto es,

$$T(S) = \{[(S_1, f_1)] : (S_1, f_1) \in M'(S)\}.$$

Denotaremos por $\mathscr{M}_{g,n}$ el conjunto que parametriza clases de isomorfía de superficies de Riemann de tipo finito (g, n). Más adelante veremos que $\mathscr{M}_{g,n}$ está provisto de estructura de espacio analítico complejo; es conocido como espacio de módulos de superficies de Riemann de tipo (g, n). Para el caso compacto anotamos simplemente $\mathscr{M}_g$. Nótese que el espacio de Teichmüller de S está provisto de una proyección natural

$$\theta : T(S) \to \mathscr{M}_{g,n} \qquad [(S', f')] \mapsto [S']$$

admitiendo como fibra sobre el punto $[S']$ a las clases de markings $[(R, g)]$ tales que $R \cong S'$.

En $M'(S)$ consideramos la relación de equivalencia $(S_1, f_1) \cong (S_2, f_2)$ si y sólo si $f_2 \circ f_1^{-1}$ es un isomorfismo y denotamos por $M(S)$ el respectivo cociente. Observamos que si $(S_1, f_1) \cong (S_2, f_2)$ entonces éstos son Teichmüller equivalentes simplemente considerando $h = f_2 \circ f_1^{-1}$ en la definición. Sigue que se tienen proyecciones naturales

$$M'(S) \to M(S) \to T(S).$$

TEOREMA 2.11. *La función* $d : M(S) \times M(S) \to \mathbb{R}$

$$d([(S_1, f_1)], [(S_2, f_2)]) = \frac{1}{2} \log K(f_2 \circ f_1^{-1})$$

es una métrica sobre $M(S)$ *que induce sobre* $T(S)$ *la métrica*

$$d([(S_1, f_1)], [(S_2, f_2)]) = \text{ínf} \frac{1}{2} \log K(\varphi),$$

donde el ínfimo se toma sobre de todos los homeomorfismos casi conformales φ *que sean homotópicos a* $f_2 \circ f_1^{-1}$. *Con esta métrica* $T(S)$ *en un espacio métrico completo.*

La métrica antes definida es conocida como la métrica de Teichmüller. Diremos que la proyección

$$\Phi : M(S) \to T(S)$$

es la proyección fundamental. La métrica d permite dotar a $T(S)$ de una topología que hace a Φ continua.

PROPOSICIÓN 2.12. *Sea* $\varphi : S \to S'$ *un homeomorfismo casi conformal entre superficies de Riemann. La aplicación*

$$\varphi^* : T(S) \to T(S') \qquad [(S_1, f_1)] \mapsto [(S_1, f_1 \circ \varphi^{-1})]$$

es una isometría en las métricas de Teichmüller. En particular, φ^* *es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Denotamos por d_S y $d_{S'}$ las métricas de Teichmüller en $T(S)$ y $T(S')$ respectivamente. Notamos que

$$d_{S'}([(S_1, f_1 \circ \varphi^{-1})], [(S_2, f_2 \circ \varphi^{-1})]) = \text{ínf} \frac{1}{2} \log K(h)$$

donde h recorre la clase de homotopía de $(f_1 \circ \varphi^{-1}) \circ (f_2 \circ \varphi^{-1})^{-1}$ que coincide con $f_1 \circ f_2^{-1}$ y, por tanto, es igual a $d_S([(S_1, f_1)], [(S_2, f_2)])$. La continuidad es clara. $\square$

Sea $Q(S)$ el grupo de todos los homeomorfismos casi-conformales de S en sí mismo. La correspondencia

$$\Theta : Q(S) \to \text{Homeo}(T(S)) \qquad \varphi \mapsto \varphi^*$$

es un homomorfismo de grupos considerando como operación la composición; nótese que su núcleo es exactamente el subgrupo normal $Q_0(S)$ compuesto por aquellos homeomorfismos que son homotópicamente triviales.

DEFINICIÓN 21. Se define el grupo modular $\text{Mod}(S)$ de S como el grupo cociente $Q(S)/Q_0(S)$, esto es, el grupo de todos los homeomorfismos casi-conformales de S en sí mismo módulo homotopía.

Denotaremos por $\langle\varphi\rangle$ la clase de φ en $\mathrm{Mod}(S)$. En la literatura el grupo modular también se suele llamar el *mapping class group*.

El grupo modular actúa sobre el espacio de Teichmüller

$$\mathrm{Mod}(S)\times T(S)\to T(S) \qquad (\langle\varphi\rangle,[(S_1,f_1)])\mapsto[(S_1,f_1\circ\varphi^{-1})]$$

por isometrías. Denotaremos por $[[(S_1,f_1)]]$ la clase de $[(S_1,f_1)]$ vista en el cociente $T(S)/\mathrm{Mod}(S)$.

PROPOSICIÓN 2.13. *La correspondencia*

$$T(S)/Mod(S)\to\mathscr{M}_{g,n} \qquad [[(S_1,f_1)]]\mapsto[S_1]$$

es una biyección.

DEMOSTRACIÓN. Sean $[[(S_1,f_1)]]$ y $[[(S_2,f_2)]]$ en $T(S)/\mathrm{Mod}(S)$ tales que $[S_1]=[S_2]$ en $\mathscr{M}_{g,n}$. Sigue que existe un isomorfismo de superficies de Riemann $h:S_1\to S_2$. Si $\varphi:=f_1^{-1}hf_2$ entonces $\langle\varphi\rangle([(S_1,f_1)])=[(S_2,f_2)]$ y de esta manera se tiene la inyectividad. La sobreyectividad es clara. $\square$

EJEMPLO 2.3. Sea S una superficie de Riemann de género uno. Entonces $T(S)$ es homeomorfo al semiplano superior $\mathbb{H}$ y $\mathrm{Mod}(S)$ es isomorfo al grupo modular clásico $\mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. De esta forma el espacio de módulos de superficies de Riemann de género uno

$$\mathscr{M}_1\cong\mathbb{H}/\mathbb{P}\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

se identifica con una orbifold de Riemann de signatura $(0;2,3,\infty)$. Esto es, el plano complejo $\mathbb{C}$ con dos puntos distinguidos. Ver Ejemplo 1.11.

Observamos que para $g=1$ se tiene que:

(a) El espacio de Teichmüller es una variedad analítica compleja de dimensión finita.
(b) El grupo modular actúa de forma propiamente discontinua por biholomorfismos sobre el espacio de Teichmüller fijando puntos.
(c) El espacio de módulos es un espacio analítico complejo no compacto.

A lo largo de este capítulo veremos que lo hechos antes listados ocurren en el caso general.

Sea G un grupo fuchsiano y $L_1^\infty(\mathbb{H},G)$ la bola unitaria del espacio de coeficientes de Beltrami de G. Recalcamos que cada $\mu\in L_1^\infty(\mathbb{H},G)$ da lugar a un homeomorfismo casi-conformal normalizado $w_\mu:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$ induciendo éste un homeomorfismo casi-conformal

$$f_\mu:S=\mathbb{H}/G\to S_\mu=\mathbb{H}/G_\mu$$

entre superficies de Riemann.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sea G un grupo fuchsiano del primer tipo y $\mu, \nu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) *f_μ y f_ν son aplicaciones homotópicas.*
(b) *$w_\mu = w_\nu$ sobre $\partial\mathbb{H}$.*
(c) *$w_\mu g(w_\mu)^{-1} = w_\nu g(w_\nu)^{-1}$ para todo $g \in G$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver, por ejemplo [**57**, p. 115]. □

Diremos que dos elementos $\mu, \nu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$ son Teichmüller equivalentes si y sólo si las extensiones a $\partial\mathbb{H}$ de w_μ y w_ν coinciden. En tal caso anotamos $\mu \simeq \nu$ y $[\mu]$ es la clase de μ.

DEFINICIÓN 22. Se define el espacio de Teichmüller de G como el conjunto de clases de equivalencia $\simeq$ en $L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$, esto es,

$$T(G) = \{[\mu] : \mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G)\}.$$

Supongamos que $S \cong \mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann. Entonces la correspondencia $\mu \mapsto (S_\mu, f_\mu)$ permite identificar $L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$ y $M(S)$. De esta forma, la métrica d sobre $M(S)$ coincide con la métrica

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \log K(w_\mu \circ w_\nu^{-1})$$

sobre $L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$ y ésta a su vez desciende a una métrica sobre $T(G)$ definiendo una topología que hace la proyección fundamental

$$\Phi : L_1^\infty(\mathbb{H}, G) \to T(G)$$

continua. Como $L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$ es una bola unitaria, se tiene el siguiente:

COROLARIO 2.15. *El espacio de Teichmüller $T(G)$ es conexo.*

Sea $\mathbf{Q}$ el grupo de todos los homeomorfismos casi-conformales de $\mathbb{H}$ en sí mismo. Denotamos por

$$\mathbf{Q}(G) = \{w \in \mathbf{Q} : w^{-1}Gw \subset \text{Möb}(\mathbb{C})\}$$

el subgrupo de $\mathbf{Q}$ compuesto por los que son compatibles con G.

PROPOSICIÓN 2.16. *Sea $w \in \mathbf{Q}(G)$. Entonces la aplicación*

$$w^* : T(w^{-1}Gw) \to T(G) \qquad [\mu] \mapsto [\mu_{w_\mu \circ w^{-1}}]$$

es una isometría en las métricas de Teichmüller. En particular, w^* es un homeomorfismo.

Definimos

$$N\mathbf{Q}(G) = \{w \in \mathbf{Q} : wGw^{-1} = G\}$$

y es claro que para cada $w \in N\mathbf{Q}(G)$ vale que $w^* : T(G) \to T(G)$ es una auto-isometría. Se tienen las siguientes propiedades:

Proposición 2.17. *Sean* $w_1, w_2 \in N\mathbf{Q}(G)$. *Entonces:*
(a) $(w_1 \circ w_2)^* = w_1^* \circ w_2^*$.
(b) $w_1^* = w_2^*$ *si y sólo si* $w_1 = w_2$ *en* $\partial\mathbb{H}$.

Recalcamos que $N\mathbf{Q}(G)$ contiene a G como subgrupo y que g^* es la identidad para cada $g \in G$.

Definición 23. Se define el grupo modular extendido de G como

$$\mathrm{mod}(G) = \frac{N\mathbf{Q}(G)}{\mathbf{Q}_0(G)}$$

donde $\mathbf{Q}_0(G)$ denota el subgrupo de $N\mathbf{Q}(G)$ de elementos cuya extensión al eje real es la identidad. Se define el grupo modular de G mediante

$$\mathrm{Mod}(G) = \mathrm{mod}(G)/G.$$

Si $w \in N\mathbf{Q}(G)$ entonces denotaremos por $[w]$ y $\langle w \rangle$ los elementos que define w en $\mathrm{mod}(G)$ y $\mathrm{Mod}(G)$ respectivamente. El grupo modular $\mathrm{Mod}(G)$ actúa sobre el espacio de Teichmüller $T(G)$ mediante la regla

$$\mathrm{Mod}(G) \times T(G) \to T(G) \qquad (\langle w \rangle, [\mu]) \mapsto \langle w \rangle([\mu]) = [\mu_{w_\mu \circ w^{-1}}]$$

Dados w_1 y w_2 en $N\mathbf{Q}(G)$ ellos inducen la misma acción sobre $T(G)$ si y sólo si existe $g \in G$ de tal suerte que $w_1 \circ w_2^{-1} = g$ en $\partial\mathbb{H}$. Además, dos elementos $[\mu]$ y $[\nu]$ de $T(G)$ son equivalentes por $\mathrm{Mod}(G)$ si y sólo si los grupos G_μ y G_ν son conjugados en $\mathrm{Möb}(\mathbb{C})$ y por tanto obtenemos una biyección

$$T(G)/\mathrm{Mod}(G) \to \mathscr{M}_{g,n}$$

cuando $\mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito (g, n).

Si $S \cong \mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico (g, n) entonces hemos definido:
(a) el espacio de Teichmüller y el grupo modular asociado a S y
(b) el espacio de Teichmüller y el grupo modular asociado a G.

La correspondencia $[\mu] \mapsto [(\mathbb{H}/G_\mu, f_\mu)]$ permite enunciar el siguiente:

Teorema 2.18. *Sea* $S = \mathbb{H}/G$ *una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico. Entonces*

$$T(G) \cong T(S)$$

mediante una isometría en las métricas de Teichmüller.

Sea $[w] \in \mathrm{mod}(G)$. Como w es un homeomorfismo casi-conformal de $\mathbb{H}$ y normaliza G, éste induce un elemento en $\mathrm{Mod}(S)$. Esta correspondencia es un homomorfismo de grupos con núcleo G. Se tiene entonces el siguiente:

TEOREMA 2.19. *Sea $S = \mathbb{H}/G$ una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico. Entonces*

$$Mod(G) \cong Mod(S).$$

Durante esta sección hemos visto que el espacio de Teichmüller y el grupo modular de $S \cong \mathbb{H}/G$ sólo dependen del tipo finito de S. Es por esta razón que es común utilizar la notación $T_{g,n}$ y $\mathrm{Mod}_{g,n}$ respectivamente. Dependiendo del contexto usaremos a conveniencia cualquiera de los dos modelos vistos tanto del espacio de Teichmüller como del grupo modular. Destacamos aquí que existen otras formas de ver el espacio de Teichmüller que no se describirán en este trabajo.

TEOREMA 2.20. *Sea S una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico (g, n). Entonces:*

(a) *El grupo modular $Mod_{g,n}$ actúa de forma propiamente discontinua sobre el espacio de Teichmüller $T_{g,n}$.*
(b) *El grupo modular $Mod_{g,n}$ actúa con puntos fijos sobre $T_{g,n}$ siempre que éste no sea trivial.*
(c) *Los puntos fijos de la acción de $Mod_{g,n}$ sobre $T_{g,n}$ son los pares $[(S', f')]$ con S' admitiendo automorfismos no triviales.*

DEMOSTRACIÓN. Ver la Sección 2.7 en [**57**]. □

2.3. El Embedding de Bers

En esta sección dotaremos al espacio de Teichmüller de estructura de variedad analítica compleja de modo que el grupo modular actúe sobre él por biholomorfismos.

DEFINICIÓN 24. Sea f una función holomorfa e inyectiva. Se define la derivada de Schwarz $S(f)$ de f mediante:

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

Consideremos el conjunto de funciones $\{1, z, f, zf\}$ cuyo wronskiano está dado por

$$W(1, z, f, zf) = 3(f'')^2 - 2f'f'''$$

Nótese que desde la definición se tiene que $S(f) = f'''/f' - 3/2(f''/f')^2$ y así

$$S(f)(z) = -\frac{W(1, z, f(z), zf(z))}{2(f'(z))^2},$$

obteniendo que $S(f) = 0$ si y sólo si $W(1, z, f, zf) = 0$. En otras palabras, existen constantes complejas a, b, c, d no todas nulas satisfaciendo

$$a + bz + cf(z) + dzf(z) = 0 \Longleftrightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Sigue que $S(f) = 0$ si y sólo si f es una transformación de Möbius.

Mediante un cálculo directo se puede probar la igualdad

$$S(f \circ g) = S(f(g)) \cdot (g')^2 + S(g).$$

Sea G un grupo fuchsiano. Denotaremos por $\mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G)$ el espacio vectorial complejo que reúne las funciones holomorfas $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{C}$ compatibles con G en el sentido de que

$$\sigma(g(z)) \cdot (g'(z))^2 = \sigma(z)$$

para $z \in \mathbb{L}$ y $g \in G$ y acotadas en el sentido de que

$$||\sigma|| = \sup_{z \in \mathbb{L}} \mathrm{Im}(z)^2 |\sigma(z)| < \infty.$$

Sea $\mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G)$. Para cada $g \in G$ existe una transformación de Möbius h de tal suerte que $h \circ w^\mu|_\mathbb{L} = w^\mu|_\mathbb{L} \circ g$. Se tiene que

$$S(w^\mu|_\mathbb{L})(z) = S(h \circ w^\mu|_\mathbb{L})(z) = S(w^\mu|_\mathbb{L}(g))(z) \cdot (g'(z))^2.$$

Además, la desigualdad de Nehari -ver [**57**, p.194]- asegura que

$$|S(w^\mu|_\mathbb{L})(z)|(2\mathrm{Im}(z))^2 \leq 6$$

y esto implica que $S(w^\mu|_\mathbb{L})$ es acotado. Sigue que

$$\mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G) \implies S(w^\mu|_\mathbb{L}) \in \mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G)$$

Proposición 2.21. *La aplicación*

$$T(G) \to \mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G) \qquad [\mu] \to S(w^\mu|_\mathbb{L})$$

está bien definida y es inyectiva.

Demostración. Nótese que $[\mu] = [\nu]$ si y sólo si $w^\mu|_\mathbb{L} = w^\nu|_\mathbb{L}$ y de esta forma la correspondencia $\mu \to S(w^\mu|_\mathbb{L})$ induce una función bien definida desde $T(G)$. Para verificar la inyectividad supongamos que $S(w^\mu|_\mathbb{L}) = S(w^\nu|_\mathbb{L})$ y definamos $h := w^\mu|_\mathbb{L} \circ (w^\nu|_\mathbb{L})^{-1}$. Derivando

$$S(w^\mu|_\mathbb{L}) = S(h(w^\nu|_\mathbb{L})) \cdot \frac{dw^\nu|_\mathbb{L}}{dz} + S(w^\nu|_\mathbb{L})$$

y como dw^ν/dz nunca se anula, la hipótesis implica que $S(h(w^\nu|_\mathbb{L})) = 0$; sigue que h es de Möbius. Nótese que h fija $\infty, 0$ y 1 y de esta forma es la identidad. Así $w^\mu|_\mathbb{L} = w^\nu|_\mathbb{L}$ y esto equivale a que $[\mu] = [\nu]$. $\square$

La aplicación de la proposición anterior se conoce como el Embedding de Bers. Se tiene el siguiente teorema (ver el tercer capítulo de [**57**]).

TEOREMA 2.22. *La aplicación $T(G) \to \mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G)$ identifica $T(G)$ con un dominio abierto y acotado de $\mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G)$ dotándolo de estructura compleja de tal suerte que la proyección fundamental $L_1^\infty(\mathbb{H}, G) \to T(G)$ es una submersión holomorfa.*

Si $S = \mathbb{H}/G$ es una superficie de Riemann de tipo finito (g, n) entonces el espacio vectorial $\mathbf{B}_2(\mathbb{L}, G)$ tiene dimensión $3g - 3 + n$. Así $T_{g,n}$ se identifica con un dominio abierto y acotado de $\mathbb{C}^{3g-3+n}$.

TEOREMA 2.23. *Sea S una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico (g, n). El espacio de Teichmüller $T_{g,n}$ es una variedad analítica compleja y si $3g - 3 + n > 0$ entonces*

$$dim_{\mathbb{C}}\, T_{g,n} = 3g - 3 + n.$$

La acción de $\mathrm{Mod}_{g,n}$ sobre $T_{g,n}$ está dada por traslaciones y la proyección fundamental admite secciones locales holomorfas. Este hecho junto con el Teorema de Cartan [**13**] permite enunciar el siguiente:

COROLARIO 2.24. *El grupo modular $Mod_{g,n}$ actúa sobre el espacio de Teichmüller $T_{g,n}$ por biholomorfismos. Además, si $3g-3+n > 0$ entonces el espacio de módulos $\mathscr{M}_{g,n}$ es un espacio analítico complejo normal de dimensión $3g - 3 + n$.*

En la primera sección del cuarto capítulo precisaremos qué es un espacio analítico complejo normal. Por ahora basta pensar que es un espacio con estructura compleja que emula bien el concepto de variedad analítica compleja pero poseyendo *buenas* singularidades.

Cada transformación modular es un biholomorfismo del espacio de Teichmüller. Más aún, en la mayoría de los casos el recíproco también es cierto: finalizamos el capítulo con el siguiente teorema (ver [**18**, p. 114]).

TEOREMA 2.25. *Si $dim_{\mathbb{C}}\, T_{g,n} \geq 3$ entonces el grupo modular $Mod_{g,n}$ es el grupo completo de automorfismos holomorfos de $T_{g,n}$.*

2.4. El Espacio de Teichmüller $T_g(H_0)$

En esta sección estudiaremos ciertas subvariedades complejas del espacio de Teichmüller asociadas a superficies de Riemann con simetrías.

Sea S_0 una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ y H_0 un grupo de automorfismos de S_0.

DEFINICIÓN 25. Sea S una superficie de Riemann y $H < \mathrm{Aut}(S)$. Diremos que el par (S, H) es una superficie de Riemann con H_0-simetría si existe un homeomorfismo $\theta : S_0 \to S$ de tal suerte que $\theta H_0 \theta^{-1} = H$.

Dos superficies de Riemann con H_0-simetría (S, H) y (S', H') son equivalentes si existe un isomorfismo de superficies de Riemann $\phi : S \to S'$ de tal suerte que $\phi H' \phi^{-1} = H$. Denotaremos por $\{S, H\}$ la clase de equivalencia de (S, H) y

$$\tilde{\mathscr{M}}_g(H_0) = \{\{S, H\} : (S, H) \, \text{con} \ H_0-\text{simetría}\}$$

el conjunto que reúne estas clases. Además, denotaremos por

$$\mathscr{M}_g(H_0) = \{[S] : (S, H) \, \text{con} \ H_0-\text{simetría}\}$$

el subconjunto del espacio de módulos $\mathscr{M}_g$ correspondiente a los puntos que representan superficies de Riemann con H_0-simetría.

Definición 26. Se define el espacio de Teichmüller $T_g(H_0)$ asociado a una superficie de Riemann de género g con H_0-simetría como el subconjunto fijo de T_g bajo la acción de H_0 visto como subgrupo del grupo modular Mod_g.

El conjunto $T_g(H_0)$ es una subvariedad compleja no vacía de T_g,

$$T_g(H_0) = \{[(S, f)] \in T_g : \exists H < \mathrm{Aut}(S), \, H = f H_0 f^{-1}\}$$

y mediante la proyección canónica $\theta : T_g \to \mathscr{M}_g$ vale que

$$\theta(T_g(H_0)) = \mathscr{M}_g(H_0).$$

Ver [**26**, p. 77].

La subvariedad compleja $T_g(H_0)$ es ella misma un espacio de Teichmüller. En efecto, es posible probar que

$$T_g(H_0) \cong T_{\gamma,n}$$

donde $R_0 := S_0/H_0$ es de tipo finito (γ, n).

Definimos el grupo modular relativo con respecto a H_0 mediante

$$\mathrm{Mod}_g(H_0) = \{\langle f \rangle \in \mathrm{Mod}_g : \langle f \rangle \cdot T_g(H_0) = T_g(H_0)\}$$

el cual coincide con el normalizador de H_0 visto como subgrupo de Mod_g. Sigue entonces que cada elemento $\langle f \rangle \in \mathrm{Mod}_g(H_0)$ induce un homeomorfismo $f' : R_0 \to R_0$ y de esta forma se tiene un homomorfismo de grupos

$$\Theta : \mathrm{Mod}_g(H_0) \to \mathrm{Mod}_{\gamma,r}$$

cuyo núcleo es H_0. Si denotamos por N la imagen de Θ, entonces

$$\mathrm{Mod}_g(H_0)/H_0 \cong N$$

y N tiene índice finito en $\mathrm{Mod}_{\gamma,r}$ como se prueba en [**21**, p.183]

Como $T_g(H_0)$ es un variedad analítica compleja y $\mathrm{Mod}_g(H_0)$ actúa por biholomorfismos, se tiene que el cociente

$$T_g(H_0)/\mathrm{Mod}_g(H_0)$$

está provisto de estructura de espacio analítico complejo normal.

Dado un punto $[(S,f)] \in T_g(H_0)$ se tiene que S por definición posee un grupo de automorfismos $H = fH_0f^{-1}$. La correspondencia $[(S,f)] \mapsto \{S,H\}$ define una aplicación sobreyectiva $T_g(H_0) \to \tilde{\mathscr{M}}_g(H_0)$. Más aún, se tiene que

$$T_g(H_0)/\mathrm{Mod}_g(H_0) \cong \tilde{\mathscr{M}}_g(H_0)$$

están en biyección y de esta forma es posible dotar a $\tilde{\mathscr{M}}_g(H_0)$ de estructura de espacio analítico complejo normal de dimensión $3\gamma - 3 + n$.

TEOREMA 2.26. $\mathscr{M}_g(H_0)$ *es una subvariedad irreducible de* $\mathscr{M}_g$ *y la aplicación*

$$\tilde{\mathscr{M}}_g(H_0) \to \mathscr{M}_g(H_0) \qquad \{S,H\} \mapsto [S]$$

es su normalización.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**26**, Teorema 1]. □

CAPÍTULO 3

Familias de Superficies de Riemann

En este capítulo estudiaremos familias holomorfas de superficies de Riemann y ciertos fibrados construidos sobre el espacio de Teichmüller.

3.1. Fibrados y Familias Holomorfas

Definición 27. Un fibrado es una aplicación continua y sobreyectiva $p : E \to B$ entre espacios topológicos. Diremos que E es el espacio total, B es el espacio base y para $b \in B$ el conjunto

$$p^{-1}(b) = \{e \in E : p(e) = b\}$$

es la fibra sobre b. Si X es un tercer espacio topológico entonces diremos que el fibrado está modelado por X si cada fibra es homeomorfa a X.

Un morfismo entre dos fibrados $p_1 : E_1 \to B_1$ y $p_2 : E_2 \to B_2$ es un par (f, g) de aplicaciones continuas de tal suerte que el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "p_1"'] & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

sea conmutativo. Si f y g son homeomorfismos entonces diremos que el par (f, g) es un homeomorfismo entre fibrados.

Ejemplo 3.1. Sea $p_2 : E_2 \to B_2$ un fibrado y $g : B_1 \to B_2$ una aplicación continua. Definimos el conjunto

$$g^*E_2 := \{(b_1, e_2) \in B_1 \times E_2 : g(b_1) = p_2(e_2)\}$$

y lo dotamos de la topología heredada de la topología producto en $B_1 \times E_2$; luego las proyecciones $p_1 : g^*E_2 \to B_1$ y $f : g^*E_2 \to E_2$ son continuas. La aplicación $p_1 : g^*E_2 \to B_1$ es un nuevo fibrado (llamado el fibrado pull-back de p_2 por g) y el par (f, g) es un morfismo entre p_1 y p_2. Nótese que la fibra sobre b_1 por p_1 es homeomorfa a la fibra sobre $g(b_1)$ por p_2.

Definición 28. Un espacio fibrado holomorfo es un fibrado $p : E \to B$ que satisface las siguientes propiedades:

(a) E y B son espacios analíticos complejos.

(b) p es una aplicación holomorfa, submersiva y sobreyectiva.

Un isomorfismo entre dos espacios fibrados holomorfos es un homeomorfismo (f, g) de fibrados tal que f y g son isomorfismos.

Sea X una superficie topológica de tipo finito (g, n).

Definición 29. Un fibrado $p : E \to B$ modelado por X es topológicamente local trivial si existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}$ de B y una colección de homeomorfismos $T_i : U_i \times X \to p^{-1}(U_i)$ de tal suerte que el diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_i) \arrow[dr, "p"'] & & U_i \times X \arrow[ll, "T_i"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

conmute, donde π_1 denota la proyección en la primera coordenada.

Definición 30. Una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito (g, n) es un espacio fibrado holomorfo $f : E \to B$ modelado por X satisfaciendo las siguientes condiciones:

(a) E y B son variedades analíticas complejas finito-dimensionales.
(b) f topológicamente local trivial.

Además, si ocurre que todas las fibras son isomorfas como superficies de Riemann entonces diremos que la familia es isotrivial.

Ejemplo 3.2. El espacio

$$E = \{([x : y : z], t) \in \mathbb{P}^2 \times (\mathbb{C} - \{0\}) : y^4 = x^3 z - t z^4\}$$

junto con la aplicación $f : E \to \mathbb{C} - \{0\}$ dada por $([x : y : z], t) \mapsto t$ es una familia holomorfa de superficies de Riemann compactas de género tres admitiendo como fibra sobre $t_0 \in \mathbb{C} - \{0\}$ la curva $y^4 = x^3 z - t_0 z^4$ en $\mathbb{P}^2$. Afirmamos f es una familia isotrivial. En efecto, si $t_1, t_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$ son distintos entonces

$$[x : y : z] \mapsto [\xi^{1/3} x : \xi^{1/4} y : x] \qquad \xi = t_2/t_1$$

es un isomorfismo entre $f^{-1}(t_1)$ y $f^{-1}(t_2)$. Ver [**57**, p. 353].

El Teorema de Finitud de Arakelov es un resultado que será fundamental para este trabajo; ver [**2**]. Una formulación adecuada para nosotros es la siguiente; su demostración puede encontrarse en [**40**, p. 207].

Teorema 3.1. *Sea C una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico. Entonces existe una cantidad finita de familias holomorfas no-isotriviales no-equivalentes de superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico fijo sobre C.*

3.2. El Espacio de Bers y la Familia Universal

Sea G un grupo fuchsiano de tal suerte que $S = \mathbb{H}/G$ sea una superficie de Riemann de tipo finito (g, n).

DEFINICIÓN 31. Se define el espacio de Bers asociado a G

$$F_{g,n} = \{([\mu], z) \in T_{g,n} \times \mathbb{C} : \mu \in L_1^\infty(\mathbb{H}, G), z \in w^\mu(\mathbb{H})\}$$

donde w^μ es la solución normalizada de la ecuación de Beltrami obtenida al extender μ como la función nula al semiplano inferior.

Recalcamos que el conjunto $w^\mu(\mathbb{H})$ es un casi-disco en $\mathbb{C}$ y que depende sólo de la clase de equivalencia de μ en $T_{g,n}$.

El espacio de Bers está provisto de una proyección natural

$$F : F_{g,n} \to T_{g,n} \qquad ([\mu], z) \mapsto [\mu]$$

admitiendo como fibra sobre $[\mu]$ el casi-disco

$$F^{-1}([\mu]) = \{([\mu], z) : z \in w^\mu(\mathbb{H})\} \cong w^\mu(\mathbb{H}).$$

Como $F_{g,n}$ es un abierto de $T_{g,n} \times \mathbb{C}$, éste hereda su topología y estructura compleja. Además, si σ es una sección global continua de la proyección fundamental $\Phi : L_1^\infty(\mathbb{H}, G) \to T_{g,n}$ entonces la aplicación

$$([\mu], z) \mapsto ([\mu], w^{\sigma([\mu])}(z)) \tag{3.1}$$

es un homeomorfismo entre $F_{g,n}$ y $T_{g,n} \times \mathbb{H}$ que respeta las proyecciones.

TEOREMA 3.2. *La proyección de Bers*

$$F : F_{g,n} \to T_{g,n}$$

es un espacio fibrado holomorfo: el espacio fibrado de Bers. Además, el grupo modular extendido $\mathrm{mod}_{g,n}$ actúa sobre $F_{g,n}$ por biholomorfismos

$$[w] \cdot ([\mu], z) = ([\nu] := \langle w \rangle([\mu]), w^\nu \circ w \circ (w^\mu)^{-1}(z))$$

para $w \in N\mathbf{Q}(G)$ y $z \in \mathbb{C}$.

Sea $g \in G$ y $w \in N\mathbf{Q}(G)$. Como las acciones de $[w]$ y $[g \circ w]$ en $F_{g,n}$ son distintas pero coinciden en la primera entrada, la acción de $\mathrm{mod}_{g,n}$ sobre $F_{g,n}$ desciende por F como la acción de $\mathrm{Mod}_{g,n}$ sobre $T_{g,n}$.

Por otro lado, G se puede ver contenido en $\mathrm{mod}_{g,n}$ como las transformaciones holomorfas inducidas por los elementos de G y de esta forma G actúa sobre $F_{g,n}$ de forma propiamente discontinua respetando fibras

$$[g] \cdot ([\mu], z) = ([\mu] = \langle g \rangle([\mu]), w^\mu \circ g \circ (w^\mu)^{-1}(z)) = ([\mu], g^\mu(z)).$$

Definición 32. Se define la familia universal como el espacio fibrado holomorfo

$$p : V_{g,n} = F_{g,n}/G \to T_{g,n}$$

donde la acción de G está dada por

$$[g] \cdot ([\mu], z) = ([\mu], w^\mu \circ g \circ (w^\mu)^{-1}(z))$$

y la fibra sobre $[\mu]$ es la superficie de Riemann $S^\mu := w^\mu(\mathbb{H})/G^\mu$.

Teorema 3.3. *El grupo $mod_{g,n}$ actúa de forma propiamente discontinua sobre $F_{g,n}$. La curva universal*

$$\pi_{g,n} : \mathscr{C}_{g,n} := F_{g,n}/mod_{g,n} \to \mathscr{M}_{g,n}$$

es un espacio fibrado complejo normal sobre el espacio de módulos $\mathscr{M}_{g,n}$ de tal suerte que la fibra sobre el punto que representa la clase de isomorfía de R es una superficie de Riemann isomorfa a $R/Aut(R)$.

Hemos ya visto que si $[\nu] = \langle w \rangle([\mu])$ entonces la aplicación

$$\varphi_{\mu\nu} : w^\mu(\mathbb{H}) \to w^\nu(\mathbb{H}) \qquad z \mapsto w^\nu w(w^\mu)^{-1}(z)$$

es holomorfa. Nótese que ésta conjuga G^μ en G^ν y de esta forma induce un isomorfismo entre S^μ y S^ν.

Proposición 3.4. *La acción de $mod_{g,n}$ sobre el espacio de Bers $F_{g,n}$ induce una acción bien definida de $Mod_{g,n}$ sobre la familia universal $V_{g,n}$.*

Observamos que

$$\mathscr{C}_{g,n} = F_{g,n}/\mathrm{mod}_{g,n} \cong (F_{g,n}/G)/(\mathrm{mod}_{g,n}/G) = V_{g,n}/\mathrm{Mod}_{g,n}$$

y, por lo tanto, tenemos aplicaciones holomorfas

$$F_{g,n} \longrightarrow V_{g,n} \longrightarrow \mathscr{C}_{g,n} \longrightarrow \mathscr{M}_{g,n}$$

con fibras sobre $\theta([\mu]) \in \mathscr{M}_{g,n}$ dadas por

$$w^\mu(\mathbb{H}) \longrightarrow w^\mu(\mathbb{H})/G^\mu \longrightarrow w^\mu(\mathbb{H})/N(G^\mu) \longrightarrow \theta([\mu])$$

Podemos construir el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F_{g,n} \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "F"'] & & \\
& V_{g,n} \arrow[r] \arrow[d, "p"] & \mathscr{C}_{g,n} = V_{g,n}/\mathrm{Mod}_{g,n} \arrow[d, "\pi_{g,n}"] \\
& T_{g,n} \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{M}_{g,n} \cong T_{g,n}/\mathrm{Mod}_{g,n}
\end{tikzcd}$$

Cada fibra de la familia universal $p : V_{g,n} \to T_{g,n}$ da lugar a una superficie de Riemann compacta después de "rellenar sus n pinchaduras" y, de esta forma, se obtiene un nuevo espacio fibrado holomorfo

$$p' : V'_{g,n} \to T_{g,n}$$

sobre el espacio de Teichmüller admitiendo como fibras a superficies de Riemann compactas de género g con n puntos marcados. Esta construcción puede hacerse al considerar grupos fuchsianos poseyendo elementos de torsión en la definición del espacio de Teichmüller. Ver, por ejemplo [**57**, p. 323]. Nos referiremos a ésta como la familia universal $n-$punteada de género g. Esta familia está provista de n secciones globales holomorfas y disjuntas

$$s_i : T_{g,n} \to V'_{g,n}$$

dadas por la posición de los n puntos marcados.

3.3. La Curva Universal de nivel

El espacio de módulos es un espacio analítico complejo que puede realizarse como un cociente del espacio de Teichmüller. En esta sección estudiaremos ciertos cocientes del espacio de Teichmüller que son lisos.

Sea S_0 una superficie de Riemann compacta de género g y $H_1(S_0, \mathbb{Z})$ el primer grupo de homología de S_0 con coeficientes enteros. Recalcamos que $H_1(S_0, \mathbb{Z})$ es isomorfo a la abelianización del grupo fundamental de S_0 y por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$.

Sea $\{a, b\} = \{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ una base canónica de $H_1(S_0, \mathbb{Z})$, es decir, su matriz de intersección es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2g, \mathbb{Z})$$

donde I_g denota la matriz identidad de formato $g \times g$.

Cada homeomorfismo f de S_0 induce un homomorfismo de grupos f_* de $H_1(S_0, \mathbb{Z})$ que hace corresponder $\{a, b\}$ con una nueva base que también es canónica. En consecuencia, existe una matriz $M(f) \in \mathrm{SL}(2g, \mathbb{Z})$ definida mediante

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M(f) \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$$

y satisfaciendo la igualdad

$$M(f) \cdot J \cdot M(f)^t = J.$$

DEFINICIÓN 33. Se define el grupo simpléctico de género g sobre $\mathbb{Z}$ mediante

$$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{SL}(2g,\mathbb{Z}) : A \cdot J \cdot A^t = J\}$$

TEOREMA 3.5. *La correspondencia*

$$Aut(S_0) \to Sp(2g,\mathbb{Z}) \qquad f \mapsto M(f)$$

es un monomorfismo de grupos para toda S_0 de género $g \geq 2$.

La demostración del teorema anterior puede encontrarse en [**20**, p. 270]. Como un automorfismo de una superficie de Riemann de género mayor que uno ha de tener orden finito, éste es representado en $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ por una matriz de orden finito. Se tiene el siguiente resultado conocido como el Lema de Serre (ver, por ejemplo [**20**, p. 275]).

LEMA 3.6. *Sea $A \in Sp(2g,\mathbb{Z})$ de orden finito $m \geq 2$. Si $A \equiv I_{2g} \mod k$ entonces $m = k = 2$.*

Notamos que el monomorfismo del Teorema 3.5 induce el homomorfismo de grupos

$$\mathrm{Aut}(S_0) \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$$

reduciendo entradas módulo k. Un automorfismo está en el núcleo si y sólo si su matriz asociada es congruente a la identidad I_{2g} módulo k. Se sigue entonces del lema anterior que si $k \geq 3$ entonces éste es inyectivo.

Más en general, se tiene una aplicación

$$\mathrm{Homeo}(S_0) \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$$

induciendo un homomorfismo de grupos

$$\mathrm{Mod}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$$

tomando clases de homotopía en la partida y reduciendo entradas módulo k en la llegada.

DEFINICIÓN 34. Sea $k \geq 3$. Se define el grupo modular de género g y de nivel k mediante

$$\mathrm{Mod}_g^{[k]} = \ker(\mathrm{Mod}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})).$$

En concreto,

$$\mathrm{Mod}_g^{[k]} = \{\langle f\rangle \in \mathrm{Mod}_g : f_*^{[k]} = id\}$$

donde

$$f_*^{[k]} : H_1(S_0,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H_1(S_0,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$$

es el homomorfismo de grupos inducido por el homeomorfismo f. Se tiene una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathrm{Mod}_g^{[k]} \longrightarrow \mathrm{Mod}_g \longrightarrow \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

Proposición 3.7. *$Mod_g^{[k]}$ es un subgrupo normal de índice finito de Mod_g y carece de elementos no triviales de orden finito.*

Demostración. Ver, por ejemplo [**57**, p. 164]. □

El grupo $\mathrm{Mod}_g^{[k]}$ actúa de forma propiamente discontinua por biholomorfismos sobre T_g y V_g por ser un subgrupo de Mod_g. Más aún, la proposición anterior nos dice que estas acciones son libres de puntos fijos. Podemos construir el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V_g & \longrightarrow & \mathscr{C}_g^{[k]} := V_g/\mathrm{Mod}_g^{[k]} & \longrightarrow & \mathscr{C}_g = V_g/\mathrm{Mod}_g \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ T_g & \longrightarrow & \mathscr{M}_g^{[k]} := T_g/\mathrm{Mod}_g^{[k]} & \longrightarrow & \mathscr{M}_g = T_g/\mathrm{Mod}_g \end{array}$$

donde $\mathscr{C}_g^{[k]}$ y $\mathscr{M}_g^{[k]}$ son variedades analíticas complejas de dimensión $3g-3$ para cada $k \geq 3$. Además, las aplicaciones holomorfas

$$\mathscr{M}_g^{[k]} \to \mathscr{M}_g \qquad \mathscr{C}_g^{[k]} \to \mathscr{C}_g$$

tienen grado finito y están dadas por la acción del grupo cociente

$$\mathrm{Mod}_g/\mathrm{Mod}_g^{[k]} \cong \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

Sea R una superficie de Riemann. Denotaremos por $\mathrm{Aut}^{[k]}(R)$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}(R)$ compuesto por aquellos automorfismos representados en $H_1(R,\mathbb{Z})$ por una matriz que es congruente a I_{2g} módulo k.

Definición 35. Se define la curva universal de nivel k y tipo $(g,0)$ como el espacio fibrado holomorfo

$$\pi_g^{[k]} : \mathscr{C}_g^{[k]} \to \mathscr{M}_g^{[k]}$$

admitiendo como fibra sobre el punto que representa la clase de isomorfía de una superficie de Riemann R una superficie de Riemann isomorfa al cociente $R/\mathrm{Aut}^{[k]}(R)$.

Si $k \geq 3$ entonces por el Lema 3.6 se tiene que $\mathrm{Aut}^{[k]}(R)$ es trivial. De esta forma, la curva universal de nivel $k \geq 3$ admite como fibra sobre el punto $[R]$ una superficie de Riemann isomorfa a R en vez de un cociente de ella. Esta cualidad es el motivo de su importancia, como veremos más adelante.

Observación 3. *De forma análoga se puede considerar la curva universal*

$$\pi_{g,n}^{[k]} : \mathscr{C}_{g,n}^{[k]} \to \mathscr{M}_{g,n}^{[k]}$$

de nivel k y tipo finito (g,n). Para $\pi_g^{[k]}$ también anotamos $\pi_{g,0}^{[k]}$.

Si consideramos la aplicación olvido

$$\mathscr{M}_{g,n}^{[k]} \to \mathscr{M}_{g,0}^{[k]}$$

y el fibrado pull-back por ella de la curva universal de nivel k y tipo finito $(g,0)$, obtenemos una nueva variedad analítica compleja $\mathscr{C}'^{[k]}_{g,n}$ sobre $\mathscr{M}_{g,n}^{[k]}$ de tal forma que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}'^{[k]}_{g,n} & \longrightarrow & \mathscr{C}^{[k]}_{g,0} \\ \pi'^{[k]}_{g,n}\downarrow & & \downarrow\pi^{[k]}_{g,0} \\ \mathscr{M}^{[k]}_{g,n} & \longrightarrow & \mathscr{M}^{[k]}_{g,0} \end{array}$$

La fibra por $\pi'^{[k]}_{g,n}$ sobre el punto que representa la clase de isomorfía de una superficie de Riemann R de tipo finito (g,n) es una superficie de Riemann isomorfa a R^* donde R^* denota la superficie de Riemann compacta obtenida después de "rellenar las n pinchaduras" de R. Nos referiremos a ésta como la curva universal $n-$punteada de nivel k y de género g.

Recalcamos que $\pi'^{[k]}_{g,n}$ posee n secciones globales holomorfas y disjuntas

$$\tilde{s}_i : \mathscr{M}^{[k]}_{g,n} \to \mathscr{C}'^{[k]}_{g,n}$$

una por cada una de las pinchaduras "rellenadas" (ver [**57**, p. 323]).

3.4. La Propiedad Universal de Teichmüller

Sea $f : E \to B$ una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito modelada como fibrado por X. Como f es topológicamente local trivial, existe un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}$ de B y homeomorfismos (trivializaciones) $T_i : U_i \times X \to f^{-1}(U_i)$ de modo que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) & \xleftarrow[T_i]{} & U_i \times X \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi_1} & \\ & U_i & \end{array}$$

es conmutativo. Supongamos que U_i es un abierto del cubrimiento de B y que $b \in U_i$. Entonces la restricción

$$T_i^b : \{b\} \times X \to f^{-1}(b)$$

de la trivialización T_i a $\{b\} \times X$ es un homeomorfismo y puede suponerse casi-conformal. Si ahora U_j es otro abierto del cubrimiento de B tal que $b \in U_i \cap U_j$ entonces la restricción

$$T_j^b : \{b\} \times X \to f^{-1}(b)$$

de la trivialización T_j a $\{b\} \times X$ es otro homeomorfismo casi-conformal. Nótese que lo anterior nos permite definir dos puntos

$$[(f^{-1}(b), T_i^b)] \qquad [(f^{-1}(b), T_j^b)]$$

en el espacio de Teichmüller $T(X)$ de X. Sea $T_{ij}(b) = T_i(b) \circ T_j^{-1}(b)$.

Definición 36. Sea $f : E \to B$ una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito.

(a) Un marking sobre f es una elección de las trivializaciones de modo que $T_{ij}(b)$ sea homotópicamente trivial para todo $b \in B$.
(b) Una familia es marcada si sobre ella se puede definir un marking.

Ejemplo 3.3. Sea $f : E \to B$ una familia holomorfa de superficies de Riemann modelada como fibrado por X, con B contractible. Entonces la familia es topológicamente trivial, es decir, existe un homeomorfismo

$$T : B \times X \to E$$

siendo éste la única trivialización. De esta forma, la restricción

$$T^b : \{b\} \times X \to f^{-1}(b)$$

puede suponerse casi-conformal y las aplicaciones $T_{ij}(b)$ son triviales; por tanto la familia es marcada.

Por ejemplo, como $T_{g,n}$ es contractible, la familia universal $p : V_{g,n} \to T_{g,n}$ es una familia marcada. Más aún, la trivialización

$$T_{g,n} \times X \to V_{g,n}$$

se puede conseguir a partir de la aplicación (3.1) de la p. 41.

Nótese que si $f : E \to B$ es una familia marcada entonces cada fibra está provista de un único marking módulo equivalencia de Teichmüller y por tanto hay una aplicación bien definida $B \to T_{g,n}$. Con las mismas notaciones, se tiene la siguiente definición:

Definición 37. Sea $f : E \to B$ una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito (g, n). Si f es marcada entonces se define la aplicación de clasificación de f mediante

$$\Phi : B \to T_{g,n} \qquad b \mapsto [(f^{-1}(b), T_i^b)].$$

Teorema 3.8. *La aplicación de clasificación es holomorfa.*

Demostración. Ver [**57**, p. 355]. □

Proposición 3.9. *El pull-back de una familia marcada es nuevamente una familia marcada.*

Definición 38. Un isomorfismo de familias marcadas es un isomorfismo de familias (ϕ, ψ) tal que la restricción de ϕ a cada fibra induzca un isomorfismo de superficies de Riemann que preserve el marking.

El siguiente importante teorema es conocido en la literatura como la Propiedad Universal de Teichmüller.

Teorema 3.10. *Sea $f : E \to B$ una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico (g, n). Si f es marcada entonces existe un único morfismo de familias marcadas entre f y la familia universal*

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & V_{g,n} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B & \longrightarrow & T_{g,n} \end{array}$$

Demostración. Su demostración puede encontrarse en [**57**, p. 349]. Para el caso infinito-dimensional ver [**17**]; para el caso $n = 0$ ver [**32**]. □

La aplicación $B \to T_{g,n}$ del diagrama anterior no puede ser otra que la aplicación de clasificación de f y, en consecuencia, f es isomorfa como familia marcada al pull-back de la familia universal por su aplicación de clasificación.

Supongamos que $f : E \to B$ es una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito (g, n). Desafortunadamente no siempre es posible marcar esta familia; sin embargo, podemos definir igualmente una aplicación de clasificación holomorfa para f pero de forma multivaluada. En efecto, sea $b \in B$ y U una bola abierta que contenga b. Restringimos la familia a $V := f^{-1}(U)$ y ahora como U se puede contraer, la familia $f : V \to U$ sí es marcada (ver Ejemplo 3.3). Si

$$\Phi : U \subset B \to T_{g,n}$$

es su aplicación de clasificación entonces Φ se extiende a B como una función holomorfa de forma multi-valuada, como afirmamos.

Además Φ induce otras dos funciones holomorfas y univaluadas:

(a) Si $b \in U \cap U'$ con U' otra bola, entonces los dos markings con los cuales se puede marcar la fibra sobre b se diferencian el uno del otro por un homeomorfismo de X. Esto implica que Φ induce una aplicación holomorfa

$$h : B \to \mathscr{M}_{g,n}$$

tal que $h = \theta \circ \Phi$ donde $\theta : T_{g,n} \to \mathscr{M}_{g,n}$ es la proyección canónica. Nótese que h envía cada punto de b a la clase de isomorfía de su fibra; esta aplicación también se conoce como la aplicación de clasificación de f.

(b) La aplicación Φ puede extenderse de forma holomorfa a lo largo de cualquier camino en B que comience en b y, por tanto, si $\pi : \tilde{B} \to B$ es el cubrimiento universal de B entonces Φ se levanta a una aplicación holomorfa

$$\tilde{\Phi} : \tilde{B} \to T_{g,n}$$

de tal suerte que $\Phi \circ \pi = \tilde{\Phi}$.

Podemos resumir lo anterior en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \tilde{B} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & T_{g,n} \arrow[d, "\theta"] \\ B \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \mathscr{M}_{g,n} \end{tikzcd}$$

CAPÍTULO 4

Uniformización de Bers-Griffiths

En este capítulo estudiaremos la uniformización de variedades algebraicas proyectivas y familias holomorfas de superficies de Riemann en el sentido de Bers-Griffiths.

4.1. Preliminares

En esta sección repasaremos brevemente algunos objetos algebraicos y analíticos que es necesario conocer antes de continuar.

4.1.1. Preliminares Algebraicos.

DEFINICIÓN 39. Un conjunto algebraico es un subconjunto X de $\mathbb{P}^n$ de los ceros comunes de los polinomios de algún ideal homogéneo $\mathbb{I}$ del anillo $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$. Si X es irreducible entonces diremos que X es una variedad algebraica proyectiva.

El Teorema de la Base de Hilbert -ver, por ejemplo [**3**, p. 90]- nos permite asegurar que el ideal $\mathbb{I}$ de la definición anterior es finitamente generado y luego X se puede ver como los ceros comunes de una cantidad finita de polinomios homogéneos.

EJEMPLO 4.1. Sea $\mathbb{I} = \langle xyz \rangle$. Entonces $\mathbb{I}$ define el conjunto algebraico

$$X = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : xyz = 0\}$$

que corresponde a la unión de tres líneas proyectivas; éste es un ejemplo de un conjunto algebraico que no es una variedad algebraica proyectiva.

De las propiedades de los ideales se siguen los siguientes hechos:

(a) $\mathbb{P}^n$ y el conjunto vacío son conjuntos algebraicos,
(b) la unión finita de conjuntos algebraicos es nuevamente un conjunto algebraico y
(c) la intersección arbitraria de conjuntos algebraicos es nuevamente un conjunto algebraico.

Lo anterior nos permite dotar a $\mathbb{P}^n$ de una topología (conocida como la topología de Zariski) declarando como cerrados a los conjuntos algebraicos. Nótese que los abiertos de Zariski son siempre densos en la topología complejo-analítica de $\mathbb{P}^n$. Una base para la topología de Zariski está formada por los abiertos de la forma $\mathbb{P}^n - \mathbf{V}(f)$ donde

$$\mathbf{V}(f) = \{p \in \mathbb{P}^n : f(p) = 0\}$$

con f irreducible. Se dice que $\mathbf{V}(f)$ es la hipersuperficie generada por f.

Una variedad algebraica proyectiva es un cerrado de $\mathbb{P}^n$ en la topología de Zariski y por tanto podemos dotarla de la topología inducida.

DEFINICIÓN 40. Una variedad algebraica casi-proyectiva es un abierto de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

EJEMPLO 4.2. Ejemplos de variedades algebraicas casi-proyectivas son las variedades algebraicas proyectivas. Si de $\mathbb{P}^n$ removemos un punto obtenemos una variedad algebraica casi-proyectiva que no es un una variedad algebraica proyectiva.

En lo que sigue cuando hablemos de *variedades algebraicas* nos referiremos a variedades algebraicas proyectivas y casi-proyectivas.

DEFINICIÓN 41. Sean $X \subset \mathbb{P}^n$ y $Y \subset \mathbb{P}^m$ dos variedades algebraicas proyectivas. Diremos que:

(a) Una aplicación $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ es regular (resp. racional) si está dada por polinomios (resp. funciones racionales) con coeficientes en $\mathbb{C}$ en cada componente.
(b) Una aplicación $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ es regular (resp. racional) si toda restricción de ella a abiertos afines de $\mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}^m$ es una aplicación regular (resp. racional).
(c) Una aplicación $X \to Y$ es regular (resp. racional) si es la restricción de una aplicación regular (resp. racional) entre los espacios proyectivos respectivos.
(d) Una aplicación $X \to Y$ es birregular (resp. birracional) si es regular (resp. racional) con inversa regular (resp. racional).
(e) X y Y son birregularmente equivalentes (resp. birracionalmente equivalentes) si existe $X \to Y$ birregular (resp. birracional). Anotamos $X \simeq Y$ (resp. $X \cong Y$).

Una aplicación regular (resp. birregular) también se conoce como un morfismo (resp. isomorfismo). Una aplicación racional no está definida en todos los puntos de X; para destacar este hecho en lo sucesivo utilizaremos la notación $X \dashrightarrow Y$.

EJEMPLO 4.3. Consideremos la aplicación regular inyectiva $s : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$ definida por

$$([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \mapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1].$$

En las coordenadas u, v, w y z la imagen X de s es la hipersuperficie generada por el polinomio $uz - vw$ y de esta forma se puede ver a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ como una cuádrica lisa en $\mathbb{P}^3$. La aplicación racional

$$X \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \qquad [u : v : w : z] \to [u : v : w]$$

está definida en todo punto salvo en $[0 : 0 : 0 : 1]$ y admite como inversa la aplicación racional

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow X \qquad [z_0 : z_1 : z_2] \mapsto [z_0^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2]$$

la cual está definida en todos los puntos de $\mathbb{P}^2$ salvo en $[0 : 0 : 1]$ y $[0 : 1 : 0]$. Sigue que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ y $\mathbb{P}^2$ son birracionalmente equivalentes.

Supongamos que X está definida por los polinomios $f_1, \ldots, f_m$ en $\mathbb{P}^n$. Un punto $x \in X$ para el cual la evaluación de la matriz jacobiana

$$J(f_1, \ldots, f_m) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \in \mathrm{M}(m \times (n+1), \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n])$$

no tiene rango maximal es llamado un punto singular de X. Si X carece de puntos singulares entonces diremos que X es una variedad algebraica proyectiva lisa o no-singular.

Ejemplo 4.4. La hipersuperficie $\mathbf{V}(f)$ es lisa si y sólo si no contiene ningún punto que anule simultáneamente todas las derivadas parciales de f.

El Teorema de Normalización de Noether -ver, por ejemplo [**62**, p. 52]- asegura que cada variedad algebraica proyectiva X está provista de una aplicación finita $X \to \mathbb{P}^s$, donde s depende sólo de X.

Definición 42. Se define la dimensión de X como el único entero s satisfaciendo el Teorema de Normalización de Noether. Anotamos

$$s = \dim X.$$

Si $U \subset X$ es una variedad algebraica casi-proyectiva no vacía entonces $X - U$ es una unión finita de subvariedades algebraicas proyectivas de X de codimensión positiva.

Curvas y superficies algebraicas proyectivas son variedades algebraicas proyectivas de dimensión uno y dos respectivamente. En el primer capítulo de este trabajo vimos que existe una equivalencia entre curvas algebraicas proyectivas conexas no-singulares y superficies de Riemann compactas. Si bien toda superficie algebraica proyectiva no-singular es una superficie compleja compacta (es decir, una variedad analítica compleja compacta de dimensión dos), el siguiente ejemplo muestra que no se tiene una equivalencia.

EJEMPLO 4.5. Sea G el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^2)$ generado por la transformación $(z, w) \mapsto (z/2, w/2)$. Entonces la superficie compleja cociente

$$\mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}/G$$

es compacta pero no algebraica proyectiva. Ver, por ejemplo [**4**, p. 172]

PROPOSICIÓN 4.1. *Sea $X_1 \to X_2$ un cubrimiento no ramificado entre superficies complejas compactas. Entonces X_1 es algebraica proyectiva si y sólo si X_2 es algebraica proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Ver, por ejemplo [**30**, p. 192]. □

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea $X \subset \mathbb{P}^m$ variedad algebraica proyectiva lisa de dimensión n. Existen polinomios homogéneos del mismo grado $f_0, \ldots, f_{n-1}$ en $m+1$ indeterminadas y abiertos de Zariski $U \subset X$ y $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ de tal suerte que la aplicación racional*

$$f : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \qquad \xi \mapsto [f_0(\xi) : \ldots : f_{n-1}(\xi)]$$

satisface las siguientes propiedades:

(a) *f induce una aplicación regular entre U y B.*
(b) *f es de rango maximal en cada punto de U.*
(c) *Para cada $b \in B$ el conjunto*

$$S_b = f^{-1}(b) \cap U$$

es superficie de Riemann tipo finito (g, k) fijo con $3g - 3 + k \geq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Ver, por ejemplo [**10**, p. 286]. □

4.1.2. Preliminares Analíticos. En este apartado revisaremos algunos objetos y resultados que necesitaremos sobre espacios analíticos complejos. Una buena referencia es [**28**].

DEFINICIÓN 43. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}^n$. Un subconjunto U de Ω es un subconjunto analítico de Ω si cada $x \in U$ tiene una vecindad $N \subset \Omega$ de tal suerte que

$$U \cap N = \{x \in N : f_1(x) = \cdots = f_s(x) = 0\}$$

para ciertas funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_s$ en N.

DEFINICIÓN 44. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{O}_X$ un subhaz del haz de gérmenes de funciones continuas de X. Se dice que X (o que el par $(X, \mathcal{O}_X)$) es un espacio analítico complejo si:

(a) X es Hausdorff y segundo numerable.

(b) cada punto $x \in X$ tiene un entorno $V \subset X$ provisto de un homeomorfismo $f : V \to U$ sobre un subconjunto analítico U de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ de tal suerte que

$$\mathcal{O}_X|V = f^*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|U)$$

El haz $\mathcal{O}_X$ de la definición anterior es, por definición, el haz de gérmenes de funciones holomorfas del espacio analítico complejo X.

Intuitivamente, un espacio analítico complejo es un espacio que luce localmente como subconjunto de un abierto de $\mathbb{C}^n$ obtenido como ceros de una colección finita de funciones holomorfas. Los ejemplos más ilustrativos se pueden conseguir como subconjuntos de $\mathbb{C}^n$.

Ejemplo 4.6. La bolas en $\mathbb{C}^n$ son espacios analíticos complejos. En efecto, basta tomar $f_1, \dots, f_s$ como las funciones nulas. El conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3\}$$

es un espacio analítico complejo tomando $f_1(x, y) = y^2 - x^3$.

Un punto $x \in X$ es un punto regular de X si tiene un entorno que es isomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^n$. Un punto singular es un punto no regular. Un espacio analítico complejo (conexo) que carece de puntos singulares es una variedad analítica compleja.

Denotaremos por $\mathcal{O}_{X,x}$ el anillo de funciones holomorfas de x.

Definición 45. Un punto $x \in X$ es normal si $\mathcal{O}_{X,x}$ es íntegramente cerrado en su anillo de cocientes.

Si todo punto de X es normal entonces se dice que X es un espacio analítico complejo normal. Todo punto regular es normal.

Ejemplo 4.7. El espacio de módulos $\mathscr{M}_{g,n}$ es un espacio analítico complejo normal como anunciamos en el Teorema 2.24. Más en general, como consecuencia del Teorema de Cartan (ver [**13**]) los cocientes de variedades analíticas complejas por la acción de grupos actuando discontinuamente son espacios analíticos complejos normales.

Definición 46. Sean X y Y dos espacios analíticos complejos. Una aplicación continua $f : X \to Y$ es una aplicación holomorfa entre espacios analíticos complejos si para todo $x \in X$ vale que

$$f^*(\mathcal{O}_{Y,f(x)}) \subset \mathcal{O}_{X,x}.$$

Definición 47. Una aplicación meromorfa entre dos espacios analíticos complejos X y Y es una correspondencia $f : X \to Y$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(a) $f(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de Y para cada $x \in X$.

(b) El grafo

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in f(x)\}$$

de f es un subespacio analítico complejo de $X \times Y$ cuya dimensión es igual a la dimensión de X.

(c) Existe un subconjunto denso X^* de X de modo que la restricción de f a X^* es una función.

La proyección $\pi : \mathrm{gr}(f) \to X$ es propia y por tanto

$$\pi^{-1}(x) = \{x\} \times f(x) \cong f(x)$$

es un subespacio analítico complejo de Y. Por un resultado de Remmert, el subconjunto S de puntos donde $f(x)$ tiene dimensión positiva es un subespacio analítico complejo cerrado de X de codimensión al menos dos. Ver, por ejemplo [**44**, p. 105]. De esta forma

$$f : X - S \to Y$$

es una aplicación holomorfa entre espacios analíticos complejos. Las nociones de aplicación biholomorfa y bimeromorfa se definen de la forma natural.

Ejemplo 4.8. Sea $U \subset \mathbb{C}^2$ un entorno de $(0, 0)$ y

$$X = \{((x, y), [z_1 : z_2]) \in U \times \mathbb{P}^1 : xz_2 = yz_1\}$$

subvariedad analítica compleja de $U \times \mathbb{P}^1$ provista de la proyección

$$\pi : X \to U \qquad ((x, y), [z_1 : z_2]) \mapsto (x, y).$$

Entonces la correspondencia inversa de π, digamos

$$f : U \to X,$$

es una aplicación meromorfa. En efecto, si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ entonces

$$f(x_0, y_0) = ((x_0, y_0), [x_0 : y_0]).$$

Además

$$f(0, 0) = \{((0, 0), [z_1 : z_2] : [z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^1\}$$

y por tanto $(0, 0)$ se corresponde con una copia L de $\mathbb{P}^1$ dentro de X. Es claro que el grafo de f es un subespacio analítico complejo de $U \times X$ de dimensión uno. En este ejemplo f no está definida como función sólo en $(0, 0)$ y por lo tanto

$$f : U - \{(0, 0)\} \to X$$

es holomorfa. De hecho,

$$f : U - \{(0, 0)\} \to X - L$$

es un biholomorfismo. La aplicación π se conoce como la explosión de U en el origen.

Cada variedad algebraica proyectiva es al mismo tiempo una subvariedad analítica compleja compacta de algún espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ (provisto $\mathbb{P}^n$ de la topología complejo-analítica). El siguiente teorema es conocido como el Teorema de Chow. Ver, por ejemplo [**4**, p. 44]

TEOREMA 4.3. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ un subespacio analítico complejo. Si X es cerrado en la topología complejo-analítica, entonces X es cerrado en la topología de Zariski.*

Serre en su famoso trabajo *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique* (más conocido como *GAGA*; ver [**59**]) prueba que las propiedades analíticas (por ejemplo, aplicaciones holomorfas y meromorfas) y las propiedades algebraicas (por ejemplo, aplicaciones regulares y racionales) se corresponden. Es por esta razón que para variedades algebraicas podemos hacer libre uso de las herramientas analíticas después de dotarlas de la estructura compleja natural. Ver, por ejemplo [**4**, p. 44] y [**34**, p. 438].

TEOREMA 4.4. *Sea X un espacio analítico complejo. Entonces existe un espacio analítico complejo normal X^N únicamente determinado por X módulo isomorfismo y una aplicación bimeromorfa*

$$\pi_N : X^N \to X$$

de grado finito. Más aún, si N denota el conjunto de los puntos normales de X, entonces π_N induce un isomorfismo entre N y $\pi_N^{-1}(N)$.

TEOREMA 4.5. *Sea X un espacio analítico complejo. Entonces existe una variedad analítica compleja Y y una aplicación bimeromorfa*

$$\pi : Y \to X$$

de tal suerte que si S denota el conjunto de los puntos singulares de X entonces π induce un isomorfismo entre $X - S$ y $Y - \pi^{-1}(S)$.

La aplicación del Teorema 4.4 se conoce como la normalización de X mientras que cada aplicación como en el Teorema 4.5 es conocida como una resolución de singularidades de X.

Recalcamos que existen muchas resoluciones de singularidades para un mismo espacio, sin embargo, para espacios analíticos complejos normales de dimensión dos se tiene el siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse, por ejemplo, en [**4**, p. 86]

TEOREMA 4.6. *Sea X una espacio analítico complejo normal de dimensión dos. Entonces el conjunto de singularidades de X es finito y existe una resolución de singularidades*

$$\pi_m : X_m \to X$$

únicamente determinada por X módulo isomorfismo caracterizada como aquélla que no contrae ninguna curva en X_m que sea racional con auto-intersección -1.

4.1.3. Dimensión de Kodaira. Sea X una variedad analítica compleja compacta y K un divisor canónico. Para cada entero positivo n denotaremos por nK el divisor de $n-$formas holomorfas de X y por $|nK|$ su sistema lineal, esto es, el conjunto de divisores efectivos de X linealmente equivalentes con nK.

Si $|nK|$ es no vacío entonces nK da lugar a una aplicación meromorfa

$$\varphi_{nK} : X \to \mathbb{P}^N$$

llamada la $n-$ésima aplicación pluri-canónica.

DEFINICIÓN 48. La dimensión de Kodaira X se define como

$$\kappa(X) = \max_{n>0} \dim \varphi_{nK}(X).$$

Si $|nK|$ es vacío para todo n entonces diremos que la dimensión de Kodaira de X es $-\infty$. Definiciones equivalentes para la dimensión de Kodaira pueden verse, por ejemplo en [**4**, p. 22] y [**43**, p. 365].

Las ideas descritas en el primer capítulo de este trabajo para justificar que toda superficie de Riemann es una curva algebraica proyectiva nos permiten escribir la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 4.7. *Sea C una superficie de Riemann compacta de género g. Entonces:*

(a) $g = 0$ *si y sólo si* $\kappa(C) = -\infty$.
(b) $g = 1$ *si y sólo si* $\kappa(C) = 0$.
(c) $g \geq 2$ *si y sólo si* $\kappa(C) = 1$.

DEFINICIÓN 49. Sea X una variedad analítica compleja compacta. Se dice que X es de tipo general si

$$\kappa(X) = \dim(X).$$

Supongamos que S es una variedad analítica compleja compacta dos-dimensional. Si S es de tipo general entonces existe n de tal suerte que

$$S \to S' := \varphi_{nK}(S)$$

es meromorfa. Notamos que S' (y por tanto también S) está provista de dos funciones meromorfas algebraicamente independientes. Sigue por el Teorema de Chrow-Kodaira que S es una superficie algebraica proyectiva. Ver, por ejemplo [**34**, p. 443].

El siguiente resultado es un caso particular de una conjetura mucho más general propuesta por Iitaka (ver, por ejemplo [**4**, p. 5]); se conoce como la sub-aditividad de la dimensión de Kodaira.

TEOREMA 4.8. *Si $f : S \to C$ un morfismo sobreyectivo entre una superficie algebraica proyectiva S y una curva algebraica proyectiva C con fibra general F, entonces*

$$\kappa(S) \geq \kappa(C) + \kappa(F).$$

En particular, si C y F son hiperbólicas entonces S es de tipo general.

DEMOSTRACIÓN. Ver [**42**, Teorema 2]. □

DEFINICIÓN 50. Un espacio analítico complejo compacto es de tipo general si posee una resolución de singularidades (que es una variedad analítica compleja compacta) de tipo general.

TEOREMA 4.9. *Sean X y Y espacios analíticos complejos tales que $dim(Y) \leq dim(X)$ con Y compacto y de tipo general. Sea A un subespacio analítico complejo de X. Entonces cada aplicación meromorfa $X - A \to Y$ de rango maximal es de hecho una aplicación meromorfa de X en Y.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**43**, p. 370]. □

4.2. Uniformización de Variedades Algebraicas

Hemos visto que existen sólo tres opciones para el cobertor universal de una superficie de Riemann. Desafortunadamente no existe un resultado similar en dimensiones mayores. Algunas razones para justificar esta afirmación son las siguientes (ver, por ejemplo [**62**, p. 401]):

(a) existe una cantidad infinita de variedades analíticas complejas compactas simplemente conexas de dimensión $n \geq 2$.
(b) para cada grupo finito Γ existe una variedad analítica compleja compacta de dimensión $n \geq 2$ cuyo grupo fundamental es Γ.
(c) el polidisco

$$\Delta^n = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1\}$$

no es isomorfo a la bola unitaria

$$\mathbf{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$$

para $n \geq 2$ (Teorema de Poincaré).

A pesar de lo anterior, Griffiths en [**29**] obtuvo una uniformización local (en el sentido de la topología de Zariski) para variedades algebraicas proyectivas utilizando la uniformización simultánea para superficies de Riemann introducida diez años antes por Bers en [**9**].

Definición 51. Sea $\mathscr{B} \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que $\mathscr{B}$ es un dominio de Bergman $n-$dimensional si es un conjunto formado por $n-$uplas $(z_1, \ldots, z_n)$ tales que $z_1 \in \Delta$ y

$$z_{j+1} \in D_{j+1}(z_1, \ldots, z_j) \qquad 1 \leq j \leq n-1$$

donde D_{j+1} es un dominio acotado de Jordan cuya curva frontera admite una representación paramétrica

$$z_{j+1} = W(z_1, \ldots, z_j; s) \qquad s \in \mathbb{S}^1 = \partial\Delta$$

donde para s fijo, la función W es holomorfa con respecto a $z_1, \ldots, z_j$ para $z_1 \in \Delta$ y $z_2 \in D_2(z_1), z_3 \in D_3(z_1, z_2), \ldots, z_j \in D_j(z_1, \ldots, z_{j-1})$.

El siguiente resultado es fundamental para esta tesis. Haremos referencia a él como el Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths; incluimos su demostración siguiendo [**10**, p. 285].

Teorema 4.10. *Sea X una variedad algebraica proyectiva lisa de dimensión n. Entonces existe un abierto de Zariski no vacío U de X de tal suerte que el cobertor universal de U es isomorfo a un dominio de Bergman $n-$dimensional.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la dimensión de X. Como primer paso notamos que el teorema en el caso $n = 1$ no nos dice más que la uniformización de superficies de Riemann. Supongamos que el teorema es cierto para $n-1$ con $n \geq 2$ y que $X \subset \mathbb{P}^s$.

La Proposición 4.2 nos permite asegurar la existencia de polinomios homogéneos $f_0, \ldots, f_{n-1}$ de tal suerte que la correspondencia

$$f : \mathbb{P}^s \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \qquad \xi \mapsto [f_0(\xi) : \ldots : f_{n-1}(\xi)]$$

induce una aplicación regular entre abiertos de Zariski $U \subset X$ y $B \subset \mathbb{P}^{n-1}$ y que para todo $b \in B$ el conjunto

$$S_b = f^{-1}(b) \cap U \subset U$$

es una superficie de Riemann de tipo finito fijo (g, k) con $3g - 3 + k \geq 0$ contenida en U. Como la dimensión de B es $n-1$, la hipótesis inductiva nos dice que existe un abierto de Zariski $U' \subset B$ uniformizado por un dominio de Bergman $(n-1)-$dimensional. Sin perder generalidad podemos suponer que $U' = B$.

Sea G un grupo fuchsiano libre de torsión de tal suerte que el cociente Δ/G sea una superficie de Riemann de tipo (g, k). Sea $b_0 \in B$ y $W \subset B$ una vecindad contractible de b_0. Restringimos f a ese abierto

$$f : V \subset U \to W \subset B$$

con $V = f^{-1}(W)$, obteniendo una familia holomorfa de superficies de Riemann que es marcada. Sigue que la aplicación de clasificación

$$\Phi : W \to T(G) \qquad b \mapsto \Phi(b) = [\mu]$$

tal que $w^\mu(\Delta)/G^\mu \cong S_b$ es holomorfa y puede ser continuada de forma holomorfa a cada camino en B. Sea $\pi : \tilde{B} \to B$ el cubrimiento universal de B y

$$\tilde{\Phi} : \tilde{B} \to T(G)$$

el levantamiento de Φ a $\tilde{B}$. Definimos

$$\mathscr{B} = \{(t, z) : t \in \tilde{B}, z \in w^{\tilde{\Phi}(t)}(\Delta)\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Nótese que en estricto rigor en la expresión anterior deberíamos escribir $\sigma(\tilde{\Phi}(t))$ en vez de $\tilde{\Phi}(t)$ donde σ es una sección del fibrado fundamental. Utilizaremos este abuso de la notación en todo lo que sigue.

Un punto típico de $\mathscr{B}$ es de la forma $(t_1, \ldots, t_{n-1}, z)$ donde $t_1 \in \Delta$, $t_{j+1} \in D_j(t_1, \ldots, t_j)$. La hipótesis inductiva asegura que D_j y su frontera satisfacen las condiciones de la Definición 51. Por otro lado,

$$z \in D_t = D_{t_1,\ldots,t_{n-1}} := w^{\tilde{\Phi}(t)}(\Delta)$$

cuya frontera es el casi-círculo

$$\partial(w^{\tilde{\Phi}(t)}(\Delta)) = w^{\tilde{\Phi}(t)}(\mathbb{S}^1)$$

donde $\mathbb{S}^1$ denota la circunferencia unitaria en $\mathbb{C}$. Sigue que la frontera de D_t admite una representación paramétrica

$$z = W(t, s) := w^{\tilde{\Phi}(t)}(s)$$

para $s \in \mathbb{S}^1$ y $t \in \Delta$. Nótese que para s fijo, la función

$$t \mapsto w^{\tilde{\Phi}(t)}(s)$$

es holomorfa. En efecto, la afirmación anterior es consecuencia de la holomorfía tanto de la aplicación de clasificación como de la correspondencia $\mu \mapsto w^\mu(z_0)$ para z_0 fijo. De esta forma, $\mathscr{B}$ es un dominio de Bergman $n-$dimensional y sólo resta chequear que es isomorfo al cobertor universal de U.

El grupo G actúa sobre $\mathscr{B}$ por biholomorfismos

$$g \cdot (t, z) = (t, w^{\tilde{\Phi}(t)} g (w^{\tilde{\Phi}(t)})^{-1}(z)) \tag{4.1}$$

de forma propiamente discontinua y sin puntos fijos; en consecuencia, el espacio cociente tiene estructura de variedad analítica compleja $n-$dimensional y la proyección $\mathscr{B} \to \mathscr{B}/G$ es el cubrimiento universal de $\mathscr{B}/G$ por ser $\mathscr{B}$ simplemente conexo.

Un punto típico de $\mathscr{B}/G$ es un par $(t, [z])$ donde

$$[z] \in w^{\tilde{\Phi}(t)}(\Delta)/G^{\tilde{\Phi}(t)} \cong S_{\pi(t)} \subset U$$

y $t \in \tilde{B}$. Podemos entonces construir una aplicación holomorfa y sobreyectiva

$$\Pi : \mathscr{B}/G \to U \qquad (t, [z]) \mapsto [z]$$

y considerar la composición $\mathscr{B} \to \mathscr{B}/G \to U$. Sigue que $\mathscr{B}$ es el cobertor universal de U, esto es, U admite como cobertor universal un dominio de Bergman $n-$dimensional. Esto concluye la demostración. $\square$

4.3. Uniformización de Familias

En esta sección estudiaremos el cobertor universal de una familia holomorfa de superficies de Riemann. Comenzamos por adaptar la demostración del Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths para probar el siguiente:

TEOREMA 4.11. *Sea R una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico y $f : V \to R$ una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico. Entonces el cobertor universal de V es isomorfo a un dominio de Bergman dos-dimensional.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es una familia de tipo finito hiperbólico (g, n). Sea $\pi : \Delta \to R$ un cubrimiento universal de R y Γ el grupo de transformaciones de π de tal suerte que R es isomorfo a Δ/Γ. Denotaremos por $h : \pi^*V \to \Delta$ la familia pull-back de f por π.

$$\begin{tikzcd}
\pi^*V \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "h"'] & V \arrow[d, "f"] \\
\Delta \arrow[r, "\pi"] & R
\end{tikzcd}$$

Recalcamos que h es una nueva familia cuyas fibras son isomorfas a las fibras de f pero que, dado que Δ es contractible, goza de la cualidad de ser una familia marcada. Sigue que su aplicación de clasificación

$$\Phi : \Delta \to T_{g,n}$$

está bien definida y, por la propiedad universal de Teichmüller, h es isomorfa al pull-back de la familia universal $p : V_{g,n} \to T_{g,n}$ por Φ. De forma equivalente, existe un isomorfismo $\pi^*V \cong \Phi^*V_{g,n}$ que preserva fibras donde

$$\Phi^*V_{g,n} = \{(t, \rho) \in \Delta \times V_{g,n} : \Phi(t) = p(\rho)\}$$

y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \pi^*V \cong \Phi^*V_{g,n} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & V_{g,n} \arrow[d, "p"] \\ \Delta \arrow[r, "\Phi"] & T_{g,n} \end{tikzcd}$$

Consideramos también la fibración pull-back del espacio fibrado de Bers $F : F_{g,n} \to T_{g,n}$ por Φ. Se tiene que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Phi^*F_{g,n} \arrow[r] \arrow[d, "F'"'] & F_{g,n} \arrow[d, "F"] \\ \Delta \arrow[r, "\Phi"] & T_{g,n} \end{tikzcd}$$

es conmutativo donde

$$\Phi^*F_{g,n} = \{(t,\xi) \in \Delta \times F_{g,n} : \Phi(t) = F(\xi)\}.$$

Denotaremos por $\pi' : \mathcal{B} \to \pi^*V$ el cubrimiento universal de π^*V.

Afirmación 1. $\mathcal{B}$ es el cobertor universal de V.

Sea $\Pi : \mathcal{B} \to V$ la aplicación continua y sobreyectiva dada por $\Pi = \pi_2 \circ \pi'$. Dado que π' es un cubrimiento y $\mathcal{B}$ es simplemente conexo, basta verificar que π_2 es un cubrimiento. Sea $v \in V$ y $z \in \Delta$ tal que $\pi(z) = f(v)$. Como Γ actúa sin puntos fijos sobre Δ existe un entorno U de z tal que $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ para todo $\gamma \in \Gamma$ no trivial. Definimos $W := f^{-1}(\pi(U))$ entorno de v. Ahora

$$\pi_2^{-1}(W) = \pi_2^{-1} f^{-1}(\pi(U)) = h^{-1}\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{\gamma\in\Gamma} h^{-1}(\gamma(U))$$

y la elección de U asegura que la unión anterior es disjunta. Es claro que para cada γ la aplicación

$$\pi_2 : h^{-1}(\gamma(U)) \to W$$

es un homeomorfismo.

Afirmación 2. $\Phi^*F_{g,n}$ es un espacio simplemente conexo.

Notamos que el fibrado $\Phi^*F_{g,n} \to \Delta$ está modelado por un casi-disco, digamos $\mathcal{D}$. Como la base y la fibra son espacios simplemente conexos, la sucesión exacta larga de homotopía asociada a la fibración es

$$1 = \pi_1(\mathcal{D}) \to \pi_1(\Phi^*F_{g,n}) \to \pi_1(\Delta) = 1$$

y por tanto $\pi_1(\Phi^*F_{g,n}) = 1$.

Afirmación 3. $\mathcal{B}$ y $\Phi^*F_{g,n}$ son isomorfos.

Ya vimos en la Afirmación 1 y en la Afirmación 2 que $\mathcal{B}$ es el cobertor universal de V y que $\Phi^* F_{g,n}$ es simplemente conexo. Nos bastará entonces probar que $\Phi^* F_{g,n}$ cubre a V. Consideramos la aplicación

$$\eta : \Phi^* F_{g,n} \to \Phi^* V_{g,n}$$

dada por

$$(t, \xi = (\Phi(t), z)) \mapsto (t, \rho = (\Phi(t), [z]))$$

donde $[z]$ denota la $G^{\Phi(t)}-$clase de z, la cual es continua, sobreyectiva y satisface $h \circ \eta = F'$. Observamos que dado $(t_0, \rho_0 = (\Phi(t_0), [z_0])) \in \Phi^* V_{g,n}$, su conjunto preimagen corresponde a los puntos de la forma

$$(t_0, \xi_0 = (\Phi(t_0), g \cdot z_0))$$

con $g \in G^{\Phi(t_0)}$ y por tanto η es un cubrimiento de $\Phi^* V_{g,n}$. Como en la Afirmación 1 ya vimos que π_2 es un cubrimientos, la composición

$$\pi_2 \circ \eta : \Phi^* F_{g,n} \to \Phi^* V_{g,n} \cong \pi^* V \to V$$

es un cubrimiento de V. La unicidad módulo isomorfía del cobertor universal nos dice que $\Phi^* F_{g,n}$ y $\mathcal{B}$ son isomorfos, probando la afirmación.

Definimos

$$\mathscr{B} = \{(t', z') \in \Delta \times \mathbb{C} : z' \in D_{t'}\}$$

donde $D_{t'} = w^{\Phi(t')}(\Delta)$. Entonces es claro que $\mathscr{B}$ es un dominio de Bergman dos-dimensional provisto de la aplicación frontera

$$W(t', s') = w^{\Phi(t')}(s'). \tag{4.2}$$

La aplicación

$$\Phi^* F_{g,n} \to \mathscr{B} \qquad (t, \xi = (\Phi(t), z)) \mapsto (t, z)$$

es holomorfa, inyectiva y su imagen es $\mathscr{B}$. Sigue que el cobertor universal de V es isomorfo al dominio de Bergman $\mathscr{B}$, probando el Teorema 4.11. $\square$

Recalcamos desde la Definición 51 que una función frontera W asociada a un dominio de Bergman dos-dimensional es una función

$$W : \Delta \times \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{C}} \qquad (t, s) \mapsto W(t, s)$$

que satisface:

(a) $s \mapsto W(t, s)$ es inyectiva para todo $t \in \Delta$.
(b) $t \mapsto W(t, s)$ es holomorfa para todo $s \in \mathbb{S}^1$.

Además, un mismo dominio de Bergman puede estar provisto de más de una función frontera.

Imayoshi y Nishimura en [**38**] y [**39**] estudiaron el cobertor universal de familias holomorfas de superficies de Riemann demostrando que una familia es isotrivial si y sólo si su cobertor universal es isomorfo al bidisco.

Definición 52. Sea $\mathscr{B}$ un dominio de Bergman dos-dimensional. Diremos que:

(a) $\mathscr{B}$ es trivial si es isomorfo al bidisco Δ^2.
(b) $\mathscr{B}$ es admisible si es no trivial y está provisto de una función frontera $W : \Delta \times \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{C}}$ satisfaciendo que

$$W(0, s) : \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{C}}$$

es la identidad.

Teorema 4.12. *Sea R una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico y $f : V \to R$ una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico. Entonces el cobertor universal de V es isomorfo a un dominio de Bergman que es admisible.*

Demostración. Utilizamos las mismas notaciones de la demostración del teorema anterior. Sea $H : \Delta \times V_0 \to \pi^*V$ una trivialización de h con $V_0 = h^{-1}(0)$ y sea $\alpha : V_0 \to X$ un difeomorfismo. Denotamos por H_t la restricción de H a $\{t\} \times V_0$ de tal suerte que la aplicación de clasificación de h es

$$\Phi : \Delta \to T(X) \qquad t \mapsto [(h^{-1}(t), H_t \circ \alpha^{-1})].$$

Hemos ya visto que, por la propiedad universal de Teichmüller, $\pi^*V \cong \Phi^*V_{g,n}$ y el cobertor universal $\mathscr{B}$ de V es isomorfo a

$$\Phi^*F_{g,n} = \{(t, z) : t \in \Delta, z \in w^{\Phi(t)}(\Delta)\}.$$

Ahora, si en la definición del espacio de Teichmüller elegimos $X = V_0$ y $\alpha = H_0$, entonces $\Phi(0) = [(V_0, id)] \in T(V_0)$. Como la aplicación frontera de $\mathscr{B}$ construida en la demostración del teorema anterior es

$$W(t, s) = w^{\Phi(t)}(s)$$

(ver ecuación (4.2) en p. 64) se sigue que

$$W(0, s) = w^{\Phi(0)}(s) = s$$

para todo $s \in \mathbb{S}^1$. Como $\mathscr{B}$ no es trivial el resultado se tiene. □

Sea

$$\mathscr{B} = \{(t, z) : t \in \Delta, z \in D_t\}$$

un dominio de Bergman isomorfo al cobertor universal de una familia $f : V \to R$ de tipo finito hiperbólico. Denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathscr{B})$ el grupo completo de biholomorfismos de $\mathscr{B}$. Sea

$$\mathbb{G} = \{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{B}) : \Pi \circ \varphi = \Pi\} \cong \pi_1(V)$$

el grupo de transformaciones del cubrimiento universal $\Pi : \mathscr{B} \to V$ de V y sea Γ el grupo de transformaciones del cubrimiento universal $\Delta \to R$ de R. Entonces los elementos de $\mathbb{G}$ son biholomorfismos de $\mathscr{B}$ de la forma

$$g(t, z) = (\hat{g}(t), g_t(z))$$

donde $\hat{g} \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ y $g_t : D_t \to D_{\hat{g}(t)}$ es un isomorfismo.

Además, el homomorfismo de grupos

$$\Theta : \mathbb{G} \to \mathrm{Aut}(\Delta) \qquad g \mapsto \hat{g}$$

induce una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{G} \xrightarrow{\Theta} \Gamma \longrightarrow 1$$

donde $\Gamma = \mathrm{im}(\Theta)$ y $\mathbb{K} := \ker(\Theta)$. Nos referiremos a ésta como la sucesión exacta de grupos asociada a la familia f.

La restricción del grupo $\mathbb{K}$ a cada dominio D_t induce un homomorfismo de grupos

$$\Phi_t : \mathbb{K} \to \mathrm{Aut}(D_t)$$

cuya imagen denotaremos por K_t. Además, como vimos en el transcurso de la demostración del Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths, el grupo

$$K_t = w^{\Phi(t)} K_0 (w^{\Phi(t)})^{-1}$$

es una deformación casi-conformal del grupo fuchsiano $K_0 \leq \mathrm{Aut}(\Delta)$ (es decir, es casi-fuchsiano; ver también la igualdad (4.1) en p. 61) y actúa sobre D_t de modo que

$$D_t / K_t \cong f^{-1}([t]_\Gamma)$$

para todo $t \in \Delta$. Diremos que $\mathbb{G}$ es una extensión de Bers-Griffiths de $\mathbb{K}$ por Γ. Nótese que la familia puede ser completamente recuperada a partir de su sucesión exacta asociada.

El siguiente teorema es un hecho que será fundamental en las demostraciones de los resultados de esta tesis; fue probado por Shabat. Ver los trabajos [**60**] y [**61**].

Teorema 4.13. *Sea $f : V \to R$ una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann tal que sus fibras y la superficie base R son de tipo finito hiperbólico y $\mathscr{B}$ el cobertor universal de V. Entonces:*

(a) *$Aut(\mathscr{B})$ actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathscr{B}$.*

(b) $\pi_1(V)$ *tiene índice finito en* $Aut(\mathscr{B})$.

Supongamos que $f : V \to R$ es una familia no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico caracterizada por la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{G} \xrightarrow{\Theta} \Gamma \longrightarrow 1.$$

Describiremos dos formas para construir nuevas familias a partir de f.

4.3.1. Subgrupos de $\mathbb{G}$.

Cada subgrupo H de $\mathbb{G}$ induce una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_H \longrightarrow H \xrightarrow{\Theta|_H} \Gamma_H \longrightarrow 1$$

por restricción, donde $\Gamma_H = \Theta(H)$ y $\mathbb{K}_H = \ker(\Theta|_H) = \mathbb{K} \cap H$.

Lema 4.14. *Si H tiene índice finito en $\mathbb{G}$, entonces Γ_H y $\mathbb{K}_H$ tienen índice finito en Γ y $\mathbb{K}$ respectivamente.*

Demostración. Supongamos que H tiene índice n en $\mathbb{G}$. Entonces existen elementos $g_1, \ldots, g_n$ en $\mathbb{G}$ de tal suerte que

$$\mathbb{G} = g_1 H \cup \ldots \cup g_n H.$$

Aplicando Θ a la igualdad anterior obtenemos que

$$\Gamma = \gamma_1 \Gamma_H \cup \ldots \cup \gamma_n \Gamma_H$$

donde $\gamma_i = \Theta(g_i)$. Sigue que Γ_H tiene índice menor o igual a n en Γ.

Ahora consideremos la aplicación

$$\Phi : \mathbb{K} \to \mathbb{G}/H \qquad k \mapsto kH.$$

Si $\Phi(k_1) = \Phi(k_2)$ entonces $k_2^{-1} k_1 \in \mathbb{K} \cap H$ y de esta forma Φ induce una aplicación inyectiva

$$\mathbb{K}/\mathbb{K}_H \to \mathbb{G}/H.$$

Sigue que $\mathbb{K}_H$ tiene índice menor o igual a n en $\mathbb{K}$.

$\square$

Sigue que cada subgrupo de índice finito H de $\mathbb{G}$ induce una nueva familia holomorfa de superficies de Riemann

$$f_H : \mathscr{B}/H \to \Delta/\Gamma_H$$

de tal suerte que su fibra sobre $[t]_{\Gamma_H}$ es isomorfa al cociente D_t/K_t^H donde K_t^H es un grupo kleiniano que realiza la acción de $\mathbb{K}_H$ sobre D_t. Como

$$|\,\mathbb{K}/\mathbb{K}_H| = \left|K_t/K_t^H\right|$$

para todo $t \in \Delta$, la fibra sobre $[t]_{\Gamma_H}$ por f_H cubre con grado finito fijo a la fibra sobre $[t]_\Gamma$ por f.

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}/\mathbb{G} \arrow[d, "f"'] & \mathscr{B}/H \arrow[l] \arrow[d, "f_H"] \\ \Delta/\Gamma & \Delta/\Gamma_H \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales indican las proyecciones inducidas por las inclusiones $H \leq \mathbb{G}$ y $\Gamma_H \leq \Gamma$.

4.3.2. Subgrupos de Γ. Cada subgrupo Γ' de Γ induce la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}' \longrightarrow \mathbb{G}' \xrightarrow{\Theta|_{\mathbb{G}'}} \Gamma' \longrightarrow 1$$

por restricción, donde $\mathbb{G}' := \Theta^{-1}(\Gamma')$ y $\mathbb{K}' = \ker(\Theta_{\mathbb{G}'}) = \mathbb{G}' \cap \mathbb{K}$.

LEMA 4.15. $\mathbb{K}' = \mathbb{K}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $g \in \mathbb{K}$ entonces $g \in \mathbb{G}$ y $\Theta(g) = 1$. Como Γ' es un subgrupo de Γ se tiene que $g \in \mathbb{G}'$ y por tanto $g \in \mathbb{K}'$. $\square$

Sigue que cada subgrupo Γ' de índice finito en Γ induce una nueva familia holomorfa de superficies de Riemann

$$f' : \mathscr{B}/\mathbb{G}' \to \Delta/\Gamma'$$

de tal suerte que su fibra sobre $[t]_{\Gamma'}$ es isomorfa a la fibra sobre $[t]_\Gamma$ por f. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B}/\mathbb{G} \arrow[d, "f"'] & \mathscr{B}/\mathbb{G}' \arrow[l] \arrow[d, "f'"] \\ \Delta/\Gamma & \Delta/\Gamma' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

donde las fechas horizontales indican las proyecciones inducidas por las inclusiones $\mathbb{G}' \leq \mathbb{G}$ y $\Gamma' \leq \Gamma$. Nótese que la nueva familia f' coincide con la familia pull-back de f por la proyección $\Delta/\Gamma' \to \Delta/\Gamma$

OBSERVACIÓN 4. *Recalcamos que los dos procesos antes descritos para construir nuevas familias a partir de una familia dada permiten, en general, aumentar el género de las fibras y de la base respectivamente. Lo relevante de esta construcción es que todas estas familias comparten el mismo cobertor universal.*

4.4. Dominios de Bergman de tipo algebraico

Comenzamos esta sección notando que todo dominio de Bergman

$$\mathscr{B} = \{(t, z) : t \in \Delta, z \in D_t\}$$

está naturalmente provisto de estructura de fibrado $\pi : \mathscr{B} \to \Delta$ de modo que la fibra sobre $t \in \Delta$ sea el disco D_t. En lo que sigue utilizaremos la notación $(\mathscr{B}, \pi)$ para indicar la estructura de fibrado de $\mathscr{B}$.

Definición 53. Un isomorfismo α entre $(\mathscr{B}_1, \pi_1)$ y $(\mathscr{B}_2, \pi_2)$ es un biholomorfismo $\alpha : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ que corresponde fibras de π_1 con fibras de π_2. También diremos que α es un isomorfismo por fibras entre $\mathscr{B}_1$ y $\mathscr{B}_2$.

Denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi)$ el subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathscr{B})$ compuesto por los automorfismos por fibras de $\mathscr{B}$. Cada elemento $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi)$ induce un elemento $\hat{\varphi} \in \mathrm{Aut}(\Delta)$ mediante

$$D_t \mapsto D_{\hat{\varphi}(t)} := \varphi(D_t).$$

Sigue que la correspondencia $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ da lugar a un homomorfismo

$$\Theta : \mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi) \to \mathrm{Aut}(\Delta)$$

el cual a su vez induce una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi) \longrightarrow \Gamma_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

donde $\Gamma_{\mathscr{B}} = \mathrm{im}(\Theta)$ y $\mathbb{K}_{\mathscr{B}} = \ker(\Phi)$. Diremos que la anterior es la sucesión exacta de grupos asociada al par $(\mathscr{B}, \pi)$.

En virtud de los Teoremas 4.11 y 4.12, el cobertor universal de una familia de superficies de Riemann es un dominio de Bergman admisible. Además, como veremos más adelante, si un dominio de Bergman admisible aparece como el cobertor universal de alguna familia entonces es el cobertor universal de una superficie algebraica casi-proyectiva.

Esta observación nos sugiere dar la siguiente definición.

Definición 54. Diremos que un dominio de Bergman admisible es de tipo algebraico si es isomorfo al cobertor universal de una familia holomorfa de superficies de Riemann cuya base y fibras son superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico.

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 4.21 el cual provee una caracterización de los dominios de Bergman admisibles que son de tipo algebraico. Antes de aquello presentaremos algunos objetos y resultados necesarios tanto para plantear esta caracterización como para demostrarla.

4.4.1. Movimientos Holomorfos.

DEFINICIÓN 55. Sea E un subconjunto de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$. Un movimiento holomorfo de E parametrizado por Δ es una función

$$f : \Delta \times E \to \overline{\mathbb{C}}$$

satisfaciendo las siguientes propiedades:
(a) $f(0, s) = s$ para todo $s \in E$.
(b) $t \mapsto f(t, s)$ es holomorfa para todo $s \in E$.
(c) $s \mapsto f(t, s)$ es inyectiva para todo $t \in \Delta$.

El concepto de movimiento holomorfo fue introducido por primera vez por Mañé, Sad y Sullivan en [**51**] atrayendo bastante atención como una herramienta útil en dinámica compleja y teoría de Teichmüller.

Un problema bien estudiado sobre movimientos holomorfos es el de la extensión, esto es, determinar condiciones bajo las cuales un movimiento holomorfo de E_1 puede extenderse a un movimiento holomorfo de $E_2 \supseteq E_1$. Después de varios resultados parciales, el problema fue completamente resuelto por Slodkowski; ver [**63**, Teorema 1.3].

TEOREMA 4.16. *Sea $f : \Delta \times E \to \overline{\mathbb{C}}$ un movimiento holomorfo de E parametrizado por Δ. Entonces f admite una extensión a un movimiento holomorfo de la esfera de Riemann parametrizado por Δ.*

Supongamos que E contiene al menos tres puntos y sea G un grupo de transformaciones de Möbius que dejen E invariante.

DEFINICIÓN 56. Un movimiento holomorfo $f : \Delta \times E \to \overline{\mathbb{C}}$ es llamado $G-$equivariante si para cada $g \in G$ y $t \in \Delta$ existe una transformación de Möbius $X_t(g)$ de modo que

$$f(t, g(s)) = X_t(g)(f(t, s))$$

para cada $s \in E$.

Un movimiento holomorfo $G-$equivariante induce una colección

$$\{X_t(G) = f_t G f_t^{-1} : t \in \Delta\}$$

de grupos que, en el lenguaje de Bers, se conoce como familia holomorfa de grupos de transformaciones de Möbius abstractamente isomorfos (ver, por ejemplo [**8**]).

El siguiente resultado complementa el Teorema 4.16.

TEOREMA 4.17. *Sea $f : \Delta \times E \to \overline{\mathbb{C}}$ un movimiento holomorfo de E parametrizado por Δ que es $G-$equivariante. Entonces f admite una extensión a un movimiento holomorfo de la esfera de Riemann parametrizado por Δ que también es $G-$equivariante.*

Demostración. Ver [**19**, Teorema 1]. □

Sullivan en [**64**] (ver también [**6**, Teorema 2.3] para un contexto más general) demostró el siguiente resultado.

Teorema 4.18. *Sea* $f : \Delta \times E \to \overline{\mathbb{C}}$ *un movimiento holomorfo de* E *parametrizado por* Δ*. Entonces la inyección*

$$f_t := f(t, \cdot) : E \to \overline{\mathbb{C}}$$

es la restricción de un homeomorfismo casi-conformal de $\overline{\mathbb{C}}$*.*

Como consecuencia del teorema anterior se puede probar que todo movimiento holomorfo es continuo. Este hecho ya había sido probado en el llamado $\lambda-$lema (ver [**51**, p. 193]).

Sea $(\mathscr{B}, \pi)$ un dominio de Bergman admisible siendo D_t la fibra sobre $t \in \Delta$. Es claro desde la Definición 52 que existe una aplicación frontera

$$W : \Delta \times \mathbb{S}^1 \to \overline{\mathbb{C}} \qquad (t, s) \mapsto W(t, s)$$

que es un movimiento holomorfo de $\mathbb{S}^1$ parametrizado por Δ. Ahora, por el Teorema 4.16, W se extiende a un movimiento holomorfo de toda la esfera de Riemann parametrizado por Δ. Denotaremos con el mismo símbolo W su restricción a $\Delta \times \Delta$. Como W_t es un homeomorfismo casi-conformal y D_t es un dominio acotado de Jordan con $\partial D_t = W_t(\mathbb{S}^1)$, se tiene que $D_t = W_t(\Delta)$ y por tanto D_t es un casi-disco para todo $t \in \Delta$. Nótese que $\mathscr{B}$ se reobtiene como el grafo del homeomorfismo

$$(t, z) \mapsto (t, W_t(z))$$

y π como la proyección en la primera coordenada. Es decir:

Proposición 4.19. *Cada dominio de Bergman admisible* $(\mathscr{B}, \pi)$ *puede recuperarse a partir de una función frontera* W *que sea un movimiento holomorfo.*

Por otro lado, todo movimiento holomorfo de Δ parametrizado por Δ da lugar a un dominio de Bergman. Veamos dos ejemplos:

Ejemplo 4.9. Un movimiento holomorfo f para el cual

$$z \mapsto f_t(z) = f(t, z)$$

es, además de inyectivo, holomorfo para todo $t \in \Delta$ (por ejemplo, el movimiento holomorfo trivial $f(t, z) = z$) da lugar a un dominio de Bergman $\mathscr{B}$ que es trivial. En efecto, en tal caso la correspondencia

$$(t, z) \mapsto (t, f_t(z))$$

es un biholomorfismo entre Δ^2 y su imagen $\mathscr{B}$.

Ejemplo 4.10. Liu en [**49**] (ver también [**65**, p. 6]) probó que el dominio de Bergman $\mathscr{B}$ inducido por el movimiento holomorfo

$$f : \Delta \times \Delta \to \overline{\mathbb{C}} \qquad (t, z) \mapsto z + t^2\overline{z}$$

es no-trivial y por tanto admisible. Afirmamos que f no es equivariante por ningún grupo fuchsiano. En efecto, por ejemplo para $t = 1/\sqrt{2}$ se tiene que

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(z) = z + (1/2)\overline{z}$$

y que

$$f^{-1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(z) = (4/3)z - (2/3)\overline{z}.$$

Entonces, usando algún programa computacional, se puede chequear que

$$f_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \circ g \circ f^{-1}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(z)$$

no es una transformación de Möbius para cada $g(z) = e^{i\theta}(z+a)/(1-\overline{a}z)$.

Sea

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi) \longrightarrow \Gamma_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

la sucesión exacta de grupos asociada a $(\mathscr{B}, \pi)$. La restricción de $\mathbb{K}_{\mathscr{B}}$ al casi-disco D_t da lugar a un homomorfismo de grupos

$$\Phi_t : \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \to \mathrm{Aut}(D_t)$$

para todo $t \in \Delta$; denotaremos por K_t la imagen de Φ_t. En particular K_0 es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\Delta)$ y por tanto deja $\mathbb{S}^1$ invariante. Nótese que, en general, el homomorfismo anterior no es inyectivo. Por ejemplo, si consideramos el bidisco junto con la proyección en la primera coordenada, podemos ver que el automorfismo no trivial de $\mathbb{K}_{\mathscr{B}}$

$$(t, z) \mapsto (t, (z - t)/(1 - \bar{t}z))$$

pertenece a $\ker(\Phi_0)$.

Proposición 4.20. *Si Φ_0 es inyectivo y W es una función frontera que es un movimiento holomorfo K_0-equivariante entonces $X_t(K_0)$ coincide con K_t para todo $t \in \Delta$. En particular, los grupos K_t son casi-conformalmente conjugados.*

Demostración. Supongamos que W es K_0-equivariante. Entonces para todo $t, z \in \Delta$ y $k_0 \in K_0$ se tiene que

$$W(t, k_0(z)) = X_t(k_0)(W(t, z))$$

donde $X_t(k_0) = W_t k_0 W_t^{-1}$ es una transformación de Möbius. Es claro que la correspondencia $z \mapsto W_t k_0 W_t^{-1}(z)$ define una aplicación holomorfa. Afirmamos que la correspondencia $t \mapsto W_t k_0 W_t^{-1}(z)$ también lo hace.

En efecto, siguiendo [**19**, p. 929], consideremos tres puntos z_1, z_2, z_3 en Δ y h_t la única transformación de Möbius tal que

$$W(t, z_i) = h_t(z_i)$$

para todo i. Sigue que

$$W(t, k_0(z_i)) = X_t(k_0)(h_t(z_i)).$$

Como las aplicaciones $t \mapsto W(t, z_i)$ y $t \mapsto W(t, k_0(z_i))$ son holomorfas, se tiene que $t \mapsto h_t$ y $t \mapsto X_t(k_0) \circ h_t$ también lo son. Esto implica que $t \mapsto X_t(k_0(z)) = W_t k_0 W_t^{-1}(z)$ es holomorfa, como afirmamos.

En consecuencia, para cada $k_0 \in K_0$ la aplicación

$$\varphi_{k_0} : \mathscr{B} \to \mathscr{B} \qquad (t, z) \mapsto (t, W_t k_0 W_t^{-1}(z))$$

es un biholomorfismo de $\mathscr{B}$ que pertenece al núcleo $\mathbb{K}_{\mathscr{B}}$. Ahora, como estamos asumiendo que Φ_0 es un isomorfismo, el homomorfismo $\Psi_0 : K_0 \to \mathbb{K}_{\mathscr{B}}$ tal que $\Psi_0(k_0) = \varphi_{k_0}$ ha de ser la inversa de Φ_0. Sigue que cada elemento de $\mathbb{K}_{\mathscr{B}}$ es de la forma

$$(t, z) \mapsto (t, W_t k_0 W_t^{-1}(z))$$

para algún $k_0 \in K_0$, es decir, $X_t(K_0) = K_t$ para todo $t \in \Delta$. La última afirmación de la proposición es consecuencia del Teorema 4.18. $\square$

4.4.2. Caracterización de los dominios de Bergman de tipo algebraico.

Teorema 4.21. *Sea $(\mathscr{B}, \pi)$ un dominio de Bergman admisible y*

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \longrightarrow Aut(\mathscr{B}, \pi) \xrightarrow{\Theta} \Gamma_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

su sucesión exacta de grupos asociada. Entonces $(\mathscr{B}, \pi)$ es de tipo algebraico si y sólo si las siguientes afirmaciones valen:

(a) *$\Gamma_{\mathscr{B}}$ es un grupo fuchsiano de tipo finito hiperbólico.*
(b) *$Aut(\mathscr{B}, \pi)$ contiene un subgrupo de índice finito $\mathbb{G}$ tal que la restricción de Φ_0 a $\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}}$ es inyectiva y $\Phi_0(\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}})$ es un grupo fuchsiano de tipo finito hiperbólico.*
(c) *$(\mathscr{B}, \pi)$ admite una función frontera W que es un movimiento holomorfo $\Phi_0(\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}})-$equivariante.*

Demostración. Supongamos que $(\mathscr{B}, \pi)$ es un dominio de Bergman de tipo algebraico isomorfo al cobertor universal de una familia $f : V \to C$ y que

$$1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

es la sucesión exacta de grupos asociada a f. Notamos que esta sucesión no es nada más que la restricción de

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi) \longrightarrow \Gamma_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

a $\mathbb{G}$. Ahora, por el Teorema 4.13, el grupo $\mathbb{G}$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B})$ y por lo tanto también en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi)$. Esto implica que Γ tiene índice finito en $\Gamma_{\mathscr{B}}$. Entonces, siendo Γ el grupo cobertor universal de la superficie de Riemann C, el grupo $\Gamma_{\mathscr{B}}$ es fuchsiano de tipo finito hiperbólico y hemos probado (a). La afirmación (b) se tiene como una consecuencia directa del Teorema de Uniformización de Bers-Griffiths para familias de superficies de Riemann como se explica en la p. 66.

Recíprocamente, supongamos que $\Gamma_{\mathscr{B}}$ es un grupo fuchsiano de tipo finito hiperbólico y que $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}, \pi)$ contiene un subgrupo de índice finito $\mathbb{G}$ de tal suerte que la restricción de Φ_0 a $\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}}$ es inyectiva, que $\Phi_0(\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}})$ es un grupo fuchsiano de tipo finito hiperbólico y que existe una función frontera W que es un movimiento holomorfo $\Phi_0(\mathbb{G} \cap \mathbb{K}_{\mathscr{B}})-$equivariante. Denotamos por

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}'_{\mathscr{B}} := \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \cap \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \Theta(\mathbb{G}) := \Gamma'_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

la sucesión exacta de grupos obtenida después de restringir Θ a $\mathbb{G}$. Por la Proposición 1.13 existe un subgrupo normal de índice finito $\Gamma''_{\mathscr{B}}$ de $\Gamma'_{\mathscr{B}}$ que es libre de torsión. Restringiendo Θ a $\mathbb{G}'' := \Theta^{-1}(\Gamma''_{\mathscr{B}})$ obtenemos la sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}'_{\mathscr{B}} \longrightarrow \mathbb{G}'' \longrightarrow \Gamma''_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

con el mismo núcleo.

Denotaremos por K'_t la imagen de $\mathbb{K}'_{\mathscr{B}}$ mediante el homomorfismo Φ_t. Recalcamos que por el Teorema 4.17 el movimiento holomorfo W se extiende a un movimiento holomorfo de Δ que sigue siendo K'_0-equivariante; lo denotaremos también por W.

Afirmación 1. $\mathbb{G}''$ actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathscr{B}$.

Sea (t', z') un punto arbitrario de $\mathscr{B}$. Como $\Gamma''_{\mathscr{B}}$ es un grupo fuchsiano libre de torsión, existe una vecindad $U \subset \Delta$ de t' de tal suerte que $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ para cada elemento no-trivial $\gamma \in \Gamma''_{\mathscr{B}}$. Sea z_0 el punto en Δ tal que $W_{t'}(z_0) = z'$. Como K'_0 es un grupo fuchsiano, existe una vecindad $V_0 \subset \Delta$ de $(0, z_0)$ tal que $k_0(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$ para finitos elementos $k_0 \in K'_0$.

Consideramos la aplicación

$$\phi_W : \Delta \times \Delta \to \Delta \times \overline{\mathbb{C}} \qquad (t, z) \mapsto (t, W_t(z))$$

cuya imagen es $\mathscr{B}$. Claramente ϕ_W es inyectiva; además, como consecuencia del Teorema 4.18, ésta es continua. El teorema de la invarianza del dominio (ver, por ejemplo [**52**, p. 216]) nos permite asegurar que

$$\mathscr{U} := \phi_W(U \times V_0) = \{(t, z) : t \in U, z \in W_t(V_0)\} \subset \mathscr{B}$$

es una vecindad de (t', z') homeomofa a $U \times V_0$.

Sea $g(t, z) = (\hat{g}(t), g_t(z))$ un biholomorfismo de $\mathscr{B}$ en $\mathbb{G}''$ tal que $g(\mathscr{U}) \cap \mathscr{U} \neq \emptyset$. Entonces existen (t_1, z_1) y (t_2, z_2) en $\mathscr{U}$ tales que

$$g(t_1, z_1) = (\hat{g}(t_1), g_{t_1}(z_1)) = (t_2, z_2).$$

Como $\hat{g}$ es un elemento de $\Gamma''_{\mathscr{B}}$ la elección de la vecindad $\mathscr{U}$ implica que $\hat{g} = id$ y por tanto $g \in \mathbb{K}'_{\mathscr{B}}$ y $t_1 = t_2$. Sea z_0^i el único punto de V_0 tal que $W_{t_1}(z_0^i) = z_i$. Apelando a los mismos argumentos usados en la demostración de la Proposición 4.20, la hipótesis permite asegurar que

$$W_{t_1} K'_0 W_{t_1}^{-1} = K'_{t_1}$$

y por tanto existe cierto $k_0 \in K'_0$ tal que $g_{t_1} = W_{t_1} k_0 W_{t_1}^{-1}$. Observamos que $k_0(z_0^1) = z_0^2$ y, en consecuencia, $k_0(V_0) \cap V_0 \neq \emptyset$. La elección de V_0 nos permite concluir que existe sólo una cantidad finita de opciones para k_0, luego finitas opciones para g_{t_1} y por tanto finitas opciones para g. Esto prueba la Afirmación 1.

La afirmación anterior implica que la sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}'_{\mathscr{B}} \longrightarrow \mathbb{G}'' \longrightarrow \Gamma''_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

da lugar a una aplicación holomorfa

$$V := \mathscr{B}/\mathbb{G}'' \to C := \Delta/\Gamma''_{\mathscr{B}}$$

entre un espacio analítico complejo dos-dimensional V y una superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico C. Si $\mathbb{G}''$ actuase libre de puntos fijos sobre $\mathscr{B}$ entonces podríamos concluir que $V \to C$ es una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico y, por tanto, que $(\mathscr{B}, \pi)$ es de tipo algebraico. En cualquier caso, los elementos de $\mathbb{G}''$ que fijan algún punto deben pertenecer al núcleo $\mathbb{K}'_{\mathscr{B}}$ y corresponderse con los elementos de torsión de K'_0. Por lo tanto existe sólo un número finito de clases de conjugación de éstos, digamos $\{h_1, \ldots, h_s\}$.

Afirmación 2. Existe un subgrupo normal de índice finito $\mathbb{G}'''$ de $\mathbb{G}''$ que no contiene ningún elemento no trivial con torsión.

Por un resultado de Johnson (ver [**41**, Teorema 3.6]), el hecho de que $\Gamma''_{\mathscr{B}}$ sea un grupo fuchsiano libre de torsión y que $\mathbb{K}'_{\mathscr{B}}$ sea finitamente generado y residualmente finito, implica que $\mathbb{G}''$ es un grupo residualmente finito. Sigue que para cada $1 \leq i \leq s$ existe un subgrupo normal de índice finito $\mathbb{G}''_i$ de $\mathbb{G}''$ que no contiene a h_i y, en consecuencia, la intersección

$$\mathbb{G}''' := \cap_{i=1}^{s} \mathbb{G}''_i$$

es un subgrupo normal de índice finito de $\mathbb{G}''$ que no contiene ningún elemento no trivial con torsión. Esto prueba la Afirmación 2.

Ahora, si restringimos la sucesión exacta de $(\mathscr{B}, \pi)$ a $\mathbb{G}'''$ obtenemos una sucesión

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}'_{\mathscr{B}} \cap \mathbb{G}''' \longrightarrow \mathbb{G}''' \longrightarrow \Gamma'''_{\mathscr{B}} := \Theta(\mathbb{G}''') \longrightarrow 1$$

la cual induce una aplicación holomorfa $\mathscr{B}/\mathbb{G}''' \to \Delta/\Gamma'''_{\mathscr{B}}$ que sí es una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico. Sigue que $(\mathscr{B}, \pi)$ es de tipo algebraico y esto concluye la demostración. $\square$

Ejemplo 4.11. El dominio de Bergman del Ejemplo 4.10 no es, por el teorema anterior, de tipo algebraico.

CAPÍTULO 5

Aritmeticidad

En este capítulo abordaremos el problema de la aritmeticidad de una variedad algebraica, esto es, estudiaremos cuándo se puede definir sobre un cuerpo de números.

5.1. Generalidades: cuerpos de definición

Sea X una variedad algebraica proyectiva y k un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Definición 57. Diremos que k es un cuerpo de definición para X si existen polinomios homogéneos con coeficientes en k de tal suerte que la variedad algebraica proyectiva que ellos definen sea isomorfa a X.

Si k es cuerpo de definición para X entonces también diremos que X se puede definir sobre k. Si X está ya escrita como ceros de polinomios con coeficientes en k entonces diremos que X está definida sobre k.

Ejemplo 5.1. La curva algebraica proyectiva de género uno

$$C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : y^2 z - x^3 + \pi z^3 = 0\}$$

está definida sobre $\mathbb{Q}(\pi)$ pero también puede definirse sobre el cuerpo de los números racionales. En efecto, C es isomorfa a

$$R = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 : y^2 z - x^3 + z^3 = 0\}$$

mediante el isomorfismo $R \to C$ dado por

$$[x : y : z] \mapsto [\sqrt[3]{\pi} x : \sqrt{\pi} y : z].$$

Denotaremos por $\mathrm{Gal}(\mathbb{C})$ el grupo de automorfismos como cuerpo del cuerpo de los números complejos y por $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$ el subgrupo compuesto aquellos automorfismos que fijan los elementos de k. La acción natural de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ se extiende a una acción sobre el anillo de polinomios con coeficientes complejos

$$(\sigma, f) \mapsto f^\sigma$$

donde f^σ es el polinomio obtenido después de aplicar σ a los coeficientes de f.

Sea X una variedad algebraica proyectiva y $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})$. Denotaremos por X^σ la variedad algebraica proyectiva definida por los polinomios obtenidos después de aplicar σ a los polinomios que definen X. Análogamente, si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo entre variedades algebraicas proyectivas entonces denotaremos por $\varphi^\sigma : X^\sigma \to Y^\sigma$ el morfismo obtenido después de aplicar σ a los polinomios que localmente definen φ. Nótese que la correspondencia $X \mapsto X^\sigma$ induce una acción de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C})$ sobre el conjunto de clases de isomorfía de variedades algebraicas proyectivas.

Definición 58. Sean X y Y dos variedades algebraicas proyectivas definidas sobre k y $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre ellas. Diremos que k es un cuerpo de definición para φ si existe un morfismo $\varphi_0 : X \to Y$ definido localmente por polinomios con coeficientes en k y existen automorfismos f y g de X y Y respectivamente de modo el diagrama que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi_0"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

sea conmutativo.

Dada una variedad algebraica proyectiva y un subcuerpo de $\mathbb{C}$, la primera pregunta que uno puede hacerse es si ésta puede o no definirse sobre aquel cuerpo. La respuesta a este problema fue dada en 1956 por Weil en [**66**]. A continuación presentamos una versión particular de este teorema que es suficiente para este trabajo.

Teorema 5.1. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad algebraica proyectiva con grupo finito de automorfismos y k un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Si existe una colección de isomorfismos*

$$\{f_\sigma : X \to X^\sigma : \sigma \in Gal(\mathbb{C}/k)\}$$

de tal suerte que para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in Gal(\mathbb{C}/k)$ la condición de co-ciclo

$$f_{\sigma_1\sigma_2} = f_{\sigma_2}^{\sigma_1} \circ f_{\sigma_1}$$

valga, entonces existe una variedad algebraica proyectiva Y definida sobre k y un isomorfismo $\varphi : X \to Y$ de tal suerte que $\varphi^\sigma \circ f_\sigma = \varphi$.

La demostración original del teorema de Weil es difícil de seguir y no provee una forma para determinar explícitamente la variedad Y. Una demostración constructiva de este teorema junto con un ejemplo explícito que muestra cómo esta demostración puede aplicarse, puede encontrarse en [**35**].

Una consecuencia directa del Teorema de Weil es que cada variedad algebraica proyectiva X sin automorfismos no triviales se puede definir sobre el cuerpo fijo del subgrupo de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C})$ compuesto por aquellos σ

para los cuales existe un isomorfismo entre X y X^σ. Aquel cuerpo se conoce en la literatura como el cuerpo de módulos de X.

Sea k un subcuerpo numerable del cuerpo de los números complejos y $\bar{k}$ su clausura algebraica. Supongamos que X es una variedad algebraica proyectiva definida sobre $\bar{k}$. Entonces la órbita de la clase de isomorfía de X (en el conjunto de clases de isomorfía de variedades algebraicas proyectivas) bajo la acción del grupo de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$, es un conjunto finito.

El siguiente teorema establece que la implicancia anterior es, de hecho, una equivalencia. Ver [**24**, p. 341]

TEOREMA 5.2. *Sea X una variedad algebraica proyectiva. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$\bar{k}$ es un cuerpo de definición para X.*
(b) *El conjunto $\{X^\sigma : \sigma \in Gal(\mathbb{C}/k)\}$ contiene finitas clases de isomorfía de variedades.*

De forma análoga, en el mismo trabajo se obtiene un resultado similar para morfismos entre variedades algebraicas proyectivas.

TEOREMA 5.3. *Sean X y Y variedades algebraicas proyectivas definidas sobre k y $\varphi : X \to Y$ un morfismo entre ellas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$\bar{k}$ es un cuerpo de definición para φ.*
(b) *El conjunto $\{\varphi^\sigma : \sigma \in Gal(\mathbb{C}/k)\}$ contiene finitas clases de equivalencia de morfismos.*

El siguiente resultado se sigue del Teorema 5.2. Ver [**24**, p. 341].

PROPOSICIÓN 5.4. *Sean X y Y dos variedades algebraicas proyectivas de la misma dimensión con Y no-singular y de tipo general. Si X está definida sobre $\bar{k}$ y existe un morfismo sobreyectivo $X \to Y$ entonces Y también está definida sobre $\bar{k}$.*

Generalizando la Definición 57 se tiene la siguiente:

DEFINICIÓN 59. Sea U una variedad algebraica casi-proyectiva contenida en la variedad algebraica proyectiva X. Diremos que U está definida sobre k si X y el cerrado de Zariski $X - U$ lo están. Diremos que U se puede definir sobre k si existe un isomorfismo $\Phi : X \to Y$ de tal suerte que Y y $\Phi(U)$ estén definidos sobre k.

En lo que sigue estaremos interesados en describir el conjunto de variedades algebraicas que se pueden definir sobre el cuerpo de los números algebraicos, esto es, la clausura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ del cuerpo de los números racionales.

Definición 60. Una variedad algebraica es aritmética si se puede definir sobre el cuerpo de números algebraicos.

Ejemplo 5.2. La superficie algebraica casi-proyectiva

$$V = \mathbb{P}^2 - \{y^2 z = x^3 + z^3\}$$

es aritmética, de hecho, está definida en $\mathbb{Q}$. La superficie algebraica casi-proyectiva

$$U = \mathbb{P}^2 - \{y^2 z = x^3 + \pi z^3\}$$

no está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ pero sí es aritmética. En efecto, el automorfismo

$$\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2 \qquad [x : y : z] \mapsto [\sqrt[3]{\pi} x : \sqrt{\pi} y : z]$$

satisface $\Phi^{-1}(U) = V$.

Recalcamos que un cuerpo de números es por definición una extensión finita del cuerpo de los números racionales.

Proposición 5.5. *Sea X una variedad algebraica proyectiva. Entonces X es aritmética si y sólo si se puede definir sobre un cuerpo de números.*

Demostración. Si X es aritmética entonces se puede definir por una colección finita de polinomios con coeficientes $\{a_1, \ldots, a_N\}$ en $\overline{\mathbb{Q}}$. Entonces X se puede definir sobre el cuerpo de números $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_N)$. La otra dirección es evidente. $\square$

5.2. Curvas y Superficies Aritméticas

5.2.1. Curvas. Una superficie de Riemann de género cero es isomorfa a la curva algebraica proyectiva definida por $z = 0$ en el plano proyectivo; sigue que se puede definir sobre el cuerpo de los números racionales y por tanto es aritmética.

Una superficie de Riemann de género uno es isomorfa a la curva algebraica proyectiva C definida por el polinomio

$$y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3$$

en el plano proyectivo para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $(4a^3 + 27b^2) \neq 0$ y, por tanto, $\mathbb{Q}(a, b)$ es un cuerpo de definición para C. Más aún, esta curva admite como cuerpo mínimo (en el sentido de la inclusión) de definición a $\mathbb{Q}(a^3/4a^3 + 27b^2)$. Sigue que existen superficies de Riemann de género uno aritméticas y no aritméticas.

Belyi notó en [**7**] que si una curva es aritmética entonces ésta está dotada de una función meromorfa que ramifica exactamente sobre tres valores. El siguiente resultado complementa lo probado por Belyi y actualmente en la literatura se conoce como el Teorema de Belyi. Para una demostración, ver por ejemplo [**22**].

TEOREMA 5.6. *Sea C una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *C es aritmética.*
(b) *C admite una función meromorfa no constante $f : C \to \mathbb{P}^1$ ramificada sobre tres valores.*
(c) *C contiene un abierto de Zariski uniformizado por un subgrupo libre de torsión y de índice finito del grupo modular.*

Una superficie de Riemann aritmética en la literatura también se suele llamar una curva de Belyi. La aplicación f de la parte (b) del teorema anterior puede ser escogida de modo que ramifique sobre $0, 1$ y ∞; en tal caso diremos que f es una función de Belyi y (C, f) es un par de Belyi.

Las curvas aritméticas han atraído bastante atención desde que Grothendieck advirtió, en su famoso *Esquisse d'un Programme* [**31**], interesantes relaciones entre pares de Belyi y cierta clase de grafos bicoloreados (llamados *dessins d'enfants*). Como consecuencia, se consigue una acción natural del grupo absoluto de Galois sobre el conjunto de todos los dessins d'enfants. En particular, los cuerpos de definición de una curva deberían estar, de cierta forma, codificados en sus dessins d'enfants. Una buena referencia para esta teoría es [**22**].

OBSERVACIÓN 5. *Para cada género fijo $g \neq 0$ existen superficies de Riemann aritméticas y no aritméticas, y sin embargo, todas ellas comparten el mismo cobertor universal. Esta observación nos dice que la aritmeticidad de una superficie de Riemann compacta es información indistinguible en su cobertor universal.*

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea $f : C_1 \to C_2$ un cubrimiento de superficies de Riemann compactas. Entonces:*

(a) *Si C_2 y todos los valores de ramificación de f son aritméticos entonces C_1 y f también son aritméticos. En particular, las funciones de Belyi son aritméticas.*
(b) *Si C_1 es aritmética entonces C_2 también es aritmética.*
(c) *Si C_1 y C_2 son aritméticas con C_2 hiperbólica, entonces f es aritmético.*
(d) *Si C_2 es hiperbólica entonces cada automorfismo de C_2 es aritmético.*
(e) *Si f es no ramificado entonces C_1 es aritmética si y sólo si C_2 es aritmética.*

Demostración. Las afirmaciones son consecuencia de los Teoremas 5.2 y 5.3 y de resultados de finitud. Ver la cuarta sección de [**24**]. □

5.2.2. Superficies. Sea $S \subset \mathbb{P}^n$ una superficie algebraica proyectiva. Entonces, por resultados clásicos de Bertini, es posible construir un pincel de hiperplanos

$$\{H_\lambda = \lambda_0 H_0 + \lambda_1 H_1 : \lambda = [\lambda_0 : \lambda_1] \in \mathbb{P}^1\}$$

en $\mathbb{P}^n$ de modo que las secciones hiperplanas $S_\lambda := S \cap H_\lambda$ sean genéricamente superficies de Riemann compactas y

$$S = \cup_{\lambda \in \mathbb{P}^1} S_\lambda.$$

La correspondencia $f(x) = \lambda$ si y sólo si $x \in S_\lambda$ nos permite definir una función racional

$$f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

definida en todos los puntos de S con la excepción de aquéllos que se encuentran sobre el eje del pincel $\cap_{\lambda \in \mathbb{P}^1} H_\lambda$. Estos últimos son los puntos que pertenecen simultáneamente a todas las secciones hiperplanas; los llamaremos puntos base y los denotemos por $\mathbb{B} = \{b_1, \ldots, b_r\}$.

Si $S^* = S - \mathbb{B}$, entonces la elección adecuada del pencil también nos permite suponer que f satisface las siguientes afirmaciones:

(a) $f : S^* \to \mathbb{P}^1$ es una submersión holomorfa fuera de los puntos críticos $\{x_1, \ldots, x_d\}$ y no dos de ellos están en la misma fibra; de esta manera se corresponden con los valores críticos de f

$$\{q_1 = f(x_1), \ldots, q_d = f(x_d)\}.$$

(b) En cada punto crítico f luce localmente como

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1^2 + z_2^2.$$

(c) En cada punto base f luce localmente como

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1/z_2.$$

Nótese que (a) implica que sólo hay un número finito de fibras singulares (aisladas) y que cada una de ellas posee exactamente una singularidad; la parte (b) afirma que aquella singularidad es un nodo.

Definición 61. Se dice que una función racional $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ es un pincel de Lefschetz si tiene conjunto base finito no vacío y satisface las tres condiciones anteriores.

Sea $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ un pincel de Lefschetz y $\mathrm{crit}(f)$ el conjunto de valores críticos de f. Si U denota el abierto de Zariski de S obtenido luego de remover las fibras singulares y los puntos base de f, entonces la restricción

$$f : U \subset S \to \mathbb{P}^1 - \mathrm{crit}(f)$$

es una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito.

DEFINICIÓN 62. Una superficie algebraica proyectiva se llama minimal si no contiene curvas de género cero con autointersección -1.

PROPOSICIÓN 5.8. *Si S es una superficie algebraica proyectiva entonces existe una superficie algebraica proyectiva minimal S_0 y un morfismo birracional $S \to S_0$. Además, si S es de tipo general entonces S_0 está únicamente determinada por S, módulo isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Ver, por ejemplo [**5**, p. 67]. □

Sea X una variedad algebraica proyectiva fija. Maehara demostró que el conjunto de clases de equivalencia birracional de superficies de tipo general que son imagen de X por una aplicación racional, es finito (ver [**50**, p. 102]). Este hecho nos permite enunciar el siguiente:

TEOREMA 5.9. *Sea X una variedad algebraica proyectiva, S una superficie algebraica proyectiva minimal de tipo general y $f : X \dashrightarrow S$ una aplicación racional dominante. Si X está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ entonces S también lo está.*

DEMOSTRACIÓN. Si X está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ entonces $X = X^\sigma$ para cada $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{Q}})$ y por tanto se tiene una aplicación racional dominante $f^\sigma : X \dashrightarrow S^\sigma$ para cada $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\bar{\mathbb{Q}})$. Entonces el resultado de Maehara implica que la colección $\{S^\sigma\}$ contiene finitas clases de equivalencia birracional. Como S es minimal entonces S^σ también lo es. La minimalidad implica que si S^{σ_1} y S^{σ_2} son biracionalmente equivalentes entonces son isomorfas. De esta forma el conjunto $\{S^\sigma\}$ contiene finitas clases de isomorfía. Sigue por el Teorema 5.2 que S está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. □

El siguiente resultado generaliza el Teorema de Belyi. Ver [**23**].

TEOREMA 5.10. *Sea S una superficie algebraica proyectiva minimal de tipo general. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *S es aritmética.*
(b) *S admite un pincel de Lefschetz $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ cuyos valores críticos están definidos en $\overline{\mathbb{Q}}$.*
(c) *S contiene un abierto de Zariski U admitiendo una uniformización de Bers-Griffiths de tal suerte que su grupo uniformizante sea una extensión de un subgrupo de índice finito y sin torsión de género cero del grupo modular.*

5.3. Dominios de Bergman de tipo aritmético

Recalcamos que en el cuarto capítulo de este trabajo hemos provisto un criterio para decidir cuándo un dominio de Bergman admisible es de tipo algebraico.

Supongamos que $(\mathscr{B}, \pi)$ es un dominio de Bergman de tipo algebraico, digamos isomorfo al cobertor universal de una familia de superficies de Riemann $f : V \to C$. Si V una superficie casi-proyectiva entonces la aplicación f está dada localmente por una colección finita de polinomios homogéneos (ver, por ejemplo [**62**, p. 35]) y por tanto tiene sentido hablar de cuerpos de definición para estas familias.

Definición 63. Sea V una superficie casi-proyectiva y $f : V \to C$ una familia holomorfa de superficies de Riemann cuya base y fibras son de tipo finito hiperbólico. Diremos que f es una familia aritmética si V, C y f lo son.

En esta sección estudiaremos aquellos dominios de Bergman de tipo algebraico que aparecen como cobertor universal de familias aritméticas.

Definición 64. Diremos que un dominio de Bergman de tipo algebraico es de tipo aritmético si es isomorfo al cobertor universal de una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico que es aritmética.

Recalcamos que si $(\mathscr{B}, \pi)$ es de tipo algebraico entonces, como consecuencia del Teorema 4.13, el grupo $\Gamma_{\mathscr{B}}$ es fuchsiano y por tanto el cociente $\Delta/\Gamma_{\mathscr{B}}$ tiene estructura de orbifold de Riemann. Utilizaremos la notación

$$\mathcal{O}_{\mathscr{B}} = (R; q_1, \dots, q_n)$$

para referirnos a la orbifold de Riemann $\Delta/\Gamma_{\mathscr{B}}$ entendiendo que su estructura de superficie de Riemann subyacente es isomorfa a R y que el cubrimiento universal $\Delta \to R$ ramifica sobre los valores $\{q_1, \dots, q_n\}$.

Definición 65. Diremos que la orbifold de Riemann

$$\mathcal{O}_{\mathscr{B}} = (R; q_1, \dots, q_n)$$

es aritmética si R y los puntos q_i son aritméticos.

Recalcamos que R es aritmética, por definición, si $\overline{R}$ y el conjunto finito $\overline{R} - R$ están definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, donde $\overline{R}$ denota la compactificación de R. El siguiente teorema es un criterio para decidir cuándo un dominio de Bergman de tipo algebraico es de tipo aritmético.

TEOREMA 5.11. *Sea* $(\mathscr{B}, \pi)$ *un dominio de Bergman de tipo algebraico y*

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathscr{B}} \longrightarrow Aut(\mathscr{B}, \pi) \longrightarrow \Gamma_{\mathscr{B}} \longrightarrow 1$$

su sucesión exacta de grupos asociada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $(\mathscr{B}, \pi)$ *es de tipo aritmético.*
(b) $\mathcal{O}_{\mathscr{B}}$ *es una orbifold de Riemann aritmética.*

COROLARIO 5.12. *Si* $\Gamma_{\mathscr{B}}$ *es conmensurable con un grupo triangular hiperbólico entonces* $(\mathscr{B}, \pi)$ *es de tipo aritmético.*

La demostración del teorema y del corolario anterior se encuentran en las Subsecciones 5.3.2 y 5.3.3 respectivamente. Antes de aquéllo presentaremos algunos objetos y resultados imprescindibles para las demostraciones.

5.3.1. Superficies de Riemann estables.

DEFINICIÓN 66. Una superficie de Riemann estable de género $g \geq 2$ es un espacio analítico complejo uno-dimensional conexo y compacto C en el cual hay un conjunto distinguido Σ de k puntos con $0 \leq k \leq 3g-3$ cuyos elementos llamaremos nodos tal que:

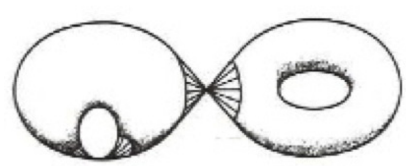
(a) cada nodo tiene una vecindad isomorfa al conjunto

$$\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : zw = 0, |z| < 1, |w| < 1\}$$

(b) el conjunto $C - \Sigma$ tiene r componentes conexas, que llamaremos las partes de C, cada una de las cuales tiene estructura de superficie de Riemann de tipo finito hiperbólico (g_i, n_i) de tal suerte que $n_1 + \cdots + n_r = 2k$ y $g = (g_1 - 1) + \cdots + (g_r - 1) + k + 1$.

Si $k = 0$ entonces C es una superficie de Riemann compacta de género g en el sentido usual. Si de $C - \Sigma$ removemos n puntos, entonces obtenemos una superficie de Riemann estable de tipo finito (g, n).

EJEMPLO 5.3. La figura siguiente ilustra cómo luce una superficie de Riemann estable de género $g = 2$ con dos nodos y dos partes.



Denotaremos por $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ el espacio que parametriza las clases de isomorfía de superficies de Riemann estables de tipo finito (g,n). Este importante espacio fue introducido por Deligne y Mumford en [**16**] siendo una compactificación del espacio de módulos $\mathscr{M}_{g,n}$; es conocido en la literatura como el espacio de Deligne-Mumford de curvas estables.

Este espacio ha sido extensamente estudiado desde distintos puntos de vista. Un resultado central es el siguiente:

TEOREMA 5.13. *El espacio de Deligne-Mumford $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ es una variedad algebraica proyectiva definida sobre $\mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**16**]. Ver también [**33**]. □

Recalcamos que la curva universal de tipo finito (g,n)

$$\pi_{g,n} : \mathscr{C}_{g,n} \to \mathscr{M}_{g,n}$$

es un espacio fibrado complejo normal de modo que la fibra sobre el punto que representa una superficie de Riemann C de tipo finito (g,n) es una superficie de Riemann isomorfa al cociente $C/\mathrm{Aut}(C)$. Ver p. 42.

A partir de $\pi_{g,n}$ se pueden considerar dos espacios fibrados holomorfos sobre la compactificación de Deligne-Mumford $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ de $\mathscr{M}_{g,n}$, como sigue:

(a) Sobre $\bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ existe un espacio analítico complejo $\bar{\mathscr{C}}_{g,n}$ y una fibración
$$\bar{\pi}_{g,n} : \bar{\mathscr{C}}_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$$
admitiendo como fibra sobre el punto que representa a una superficie de Riemann estable C de tipo (g,n) una superficie de Riemann estable isomorfa al cociente $C/\mathrm{Aut}(C)$. Nos referiremos a ésta como la curva universal estable de tipo (g,n). Nótese que $\bar{\mathscr{C}}_{g,n}$ no es compacto cuando $n > 0$ y que $\bar{\pi}_{g,n}$ extiende $\pi_{g,n}$.

(b) Sea $\mathscr{F} : \bar{\mathscr{M}}_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}_g$ la aplicación olvido. Si consideramos el fibrado pull-back de la curva universal estable de tipo $(g,0)$ por $\mathscr{F}$ entonces se obtiene un nuevo espacio fibrado holomorfo
$$\bar{\pi}'_{g,n} : \bar{\mathscr{C}}'_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$$
de tal suerte que el diagrama
$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathscr{C}}'_{g,n} & \longrightarrow & \bar{\mathscr{C}}_{g,0} \\ \bar{\pi}'_{g,n}\downarrow & & \downarrow\bar{\pi}_{g,0} \\ \bar{\mathscr{M}}_{g,n} & \xrightarrow{\mathscr{F}} & \bar{\mathscr{M}}_{g,0}. \end{array}$$
es conmutativo. La fibra sobre el punto que representa a una superficie de Riemann estable C de tipo (g,n) es una superficie

de Riemann estable isomorfa al cociente $C^*/\mathrm{Aut}(C^*)$ donde C^* denota la superficie de Riemann estable y compacta de género g obtenida después de "rellenar las n pinchaduras" de C. Nos referiremos a ésta como la curva universal estable $n-$punteada de género g. Nótese que $\bar{\mathscr{C}}'_{g,n}$ es compacto.

Recalcamos que los espacios $\mathscr{C}^{[k]}_{g,n}$ y $\mathscr{M}^{[k]}_{g,n}$ son variedades analíticas complejas para cada $k \geq 3$ y que cubren con grado finito a $\mathscr{C}_{g,n}$ y a $\mathscr{M}_{g,n}$ respectivamente. Además, la curva universal de nivel k y tipo finito (g,n)

$$\pi^{[k]}_{g,n} : \mathscr{C}^{[k]}_{g,n} \to \mathscr{M}^{[k]}_{g,n}$$

es un espacio fibrado holomorfo admitiendo como fibra sobre el punto que representa una superficie de Riemann C de tipo (g,n) una superficie de Riemann isomorfa a C (en vez de un cociente suyo). Ver p. 45.

Sobre la compactificación de Deligne-Mumford $\bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n}$ de $\mathscr{M}^{[k]}_{g,n}$, de forma completamente análoga a como hemos hecho para la curva universal, podemos considerar:

(a) la curva universal estable de nivel k y de tipo finito (g,n)

$$\bar{\pi}^{[k]}_{g,n} : \bar{\mathscr{C}}^{[k]}_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n}$$

de tal suerte que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathscr{C}}_{g,n} & \longleftarrow & \bar{\mathscr{C}}^{[k]}_{g,n} \\ \bar{\pi}_{g,n}\downarrow & & \downarrow \bar{\pi}^{[k]}_{g,n} \\ \bar{\mathscr{M}}_{g,n} & \longleftarrow & \bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n} \end{array}$$

es conmutativo y admitiendo como fibra sobre el punto que representa una superficie de Riemann estable C de tipo (g,n) una superficie de Riemann isomorfa a C.

(b) la curva universal estable $n-$punteada de nivel k y de género g

$$\bar{\pi}'^{[k]}_{g,n} : \bar{\mathscr{C}}'^{[k]}_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n}$$

de tal suerte que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathscr{C}}'^{[k]}_{g,n} & \longrightarrow & \bar{\mathscr{C}}^{[k]}_{g,0} \\ \bar{\pi}'^{[k]}_{g,n}\downarrow & & \downarrow \bar{\pi}^{[k]}_{g,0} \\ \bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n} & \xrightarrow{\mathscr{F}^{[k]}} & \bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,0} \end{array}$$

es conmutativo, donde $\mathscr{F}^{[k]}$ es la aplicación olvido y admitiendo como fibra sobre el punto que representa una superficie de Riemann estable C de tipo (g,n) una superficie de Riemann compacta de género g isomorfa a C^*.

Ver [**56**, p. 285] y [**57**, p. 323].

TEOREMA 5.14. *$\bar{\mathscr{C}}^{[k]}_{g,n}$, $\bar{\mathscr{C}}'^{[k]}_{g,n}$ y $\bar{\mathscr{M}}^{[k]}_{g,n}$ son variedades algebraicas proyectivas definidas sobre $\mathbb{Z}[\frac{1}{k}]$.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [**16**, p. 106]. □

Sea $f: V \to C$ una familia holomorfa de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico (g,n) sobre una curva C de tipo finito hiperbólico y

$$\Phi_f : C \to \mathscr{M}_{g,n} \qquad t \mapsto [f^{-1}(t)]$$

su aplicación de clasificación. Un resultado muy importante para nosotros será el siguiente teorema, el cual fue probado por Imayoshi basándose en un resultado de Kobayashi sobre extensiones de aplicaciones holomorfas entre espacios complejos. Ver [**37**, p. 289].

TEOREMA 5.15. *La aplicación de clasificación $\Phi_f : C \to \mathscr{M}_{g,n}$ se extiende a una aplicación holomorfa*

$$\bar{\Phi}_f : \overline{C} \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}.$$

Sea $\pi : \Delta \to C$ el cubrimiento universal de C y Γ su grupo cobertor universal. Denotamos por

$$h : \pi^* V \to \Delta$$

la familia pull-back de f por π y por $\tilde{\Phi} : \Delta \to T_{g,n}$ su aplicación de clasificación. La monodromía de f es el homomorfismo de grupos

$$\Theta : \Gamma \to \mathrm{Mod}_{g,n}$$

definido mediante la igualdad $\tilde{\Phi}_f \circ \gamma = \Theta(\gamma) \circ \tilde{\Phi}_f$ para $\gamma \in \Gamma$.

Denotaremos por Γ_3 el grupo preimagen por Θ de $\mathrm{Mod}^{[3]}_{g,n}$ y por C_3 la respectiva superficie de Riemann cociente Δ/Γ_3. Es claro por la propia construcción que C_3 está dotada de un cubrimiento no-ramificado $\pi_3 : C_3 \to C$ sobre C. Denotaremos por $f_3 : V_3 \to C_3$ la familia pull-back de f por π_3. Ahora, la aplicación Φ_f se levanta a una aplicación holomorfa

$$\Phi_{f_3} : C_3 \to \mathscr{M}^{[3]}_{g,n} = T_{g,n}/\mathrm{Mod}^{[3]}_{g,n}.$$

Gracias a la Propiedad Universal de Teichmüller la familia $f_3 : V_3 \to C_3$ se recupera como el pull-back de la curva universal de nivel tres y tipo (g, n) por Φ_{f_3}. El siguiente diagrama conmuta donde $V_3 \cong \Phi_{f_3}^* \mathscr{C}_{g,n}^{[3]}$.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "f"'] & V_3 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & \mathscr{C}_{g,n}^{[3]} \arrow[d, "\pi_{g,n}^{[3]}"] \\
C & C_3 \arrow[l, "\pi_3"'] \arrow[r, "\Phi_{f_3}"] & \mathscr{M}_{g,n}^{[3]}
\end{tikzcd}$$

Recalcamos que las n secciones de $\pi_{g,n}^{[3]}$ (ver p. 46) inducen n secciones globales holomorfas y disjuntas $s_i : C_3 \to V_3$ de la familia f_3.

Utilizando los mismos argumentos esgrimidos para probar el Teorema 5.15, se puede verificar que Φ_{f_3} se extiende a una aplicación holomorfa

$$\bar{\Phi}_{f_3} : \overline{C}_3 \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}^{[3]}$$

entre variedades algebraicas proyectivas.

Ahora podemos considerar la fibración pull-back de la curva universal estable $n-$punteada de nivel tres y género g

$$\bar{\pi}_{g,n}^{\prime[3]} : \bar{\mathscr{C}}_{g,n}^{\prime[3]} \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}^{[3]}$$

por $\bar{\Phi}_{f_3}$ para obtener un espacio analítico complejo compacto de dimensión dos

$$\hat{V}_3 := \bar{\Phi}_{f_3}^* \bar{\mathscr{C}}_{g,n}^{\prime[3]}$$

dotado de una aplicación holomorfa $\hat{f}_3 : \hat{V}_3 \to \overline{C}_3$ de tal forma que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
V_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & \hat{V}_3 \arrow[r] \arrow[d, "\hat{f}_3"] & \bar{\mathscr{C}}_{g,n}^{\prime[3]} \arrow[d, "\bar{\pi}_{g,n}^{\prime[3]}"] \\
C_3 \arrow[r] & \overline{C}_3 \arrow[r, "\bar{\Phi}_{f_3}"] & \bar{\mathscr{M}}_{g,n}^{[3]}
\end{tikzcd}$$

conmute. Nótese que $\hat{f}_3$ coincide con f_3 en V_3.

PROPOSICIÓN 5.16. *Si la base y las fibras de $\hat{f}_3 : \hat{V}_3 \to \overline{C}_3$ tienen género mayor que uno entonces $\hat{V}_3$ es una superficie algebraica proyectiva de tipo general.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r : \tilde{V}_3 \to \hat{V}_3$ una resolución de singularidades de $\hat{V}_3$ y $\tilde{f}_3 : \tilde{V}_3 \to \overline{C}_3$ la aplicación asociada de tal suerte que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& \tilde{V}_3 \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "\tilde{f}_3"] & \\
\hat{V}_3 \arrow[rr, "\hat{f}_3"] & & \overline{C}_3
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Ahora, siguiendo los argumentos utilizados en la demostración de la Proposición (4.1) en [**4**, p. 194], si $\tilde{V}_3$ no fuese una superficie algebraica entonces las fibras de $\tilde{f}_3$ serían curvas elípticas y por tanto las fibras de $\hat{f}_3$ también; esto contradice nuestra suposición sobre el género de las fibras. Sigue que $\hat{V}_3$ es una superficie algebraica proyectiva. Ahora, por la sub-aditividad de la dimensión de Kodaira, el hecho de que la base y las fibras de $\tilde{f}_3$ sean de género al menos dos implica que $\tilde{V}_3$ es de tipo general (ver Teorema 4.8); sigue que $\hat{V}_3$ es algebraica proyectiva y de tipo general. $\square$

Nótese que la diferencia $\hat{V}_3 - V_3$ corresponde a la unión de una cantidad finita curvas estables (las fibras sobre $\overline{C}_3 - C_3$) junto con la imagen de las n secciones globales holomorfas y disjuntas de la familia $f_3 : V_3 \to C_3$.

5.3.2. Demostración del Teorema 5.11. Sea $(\mathscr{B}, \pi)$ un dominio de Bergman de tipo algebraico y $f : V \to C$ una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann tal que $(\mathscr{B}, \pi)$ es isomorfo al cobertor universal de V.

Supongamos que f está caracterizada por la sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

y que las fibras de f son de tipo finito (g, n). Podemos suponer que g y el género de C son al menos dos (ver Observación 4 en la p. 68).

Supongamos que $(\mathscr{B}, \pi)$ es de tipo aritmético. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la familia $f : V \to C$ es aritmética. El Teorema 4.13 implica que el grupo Γ tiene índice finito en $\Gamma_{\mathscr{B}}$ y por lo tanto esa inclusión induce un cubrimiento ramificado de grado finito entre C y R. Denotaremos por $\beta : \overline{C} \to \overline{R}$ el cubrimiento ramificado asociado entre las respectivas superficies de Riemann compactas. Siendo la imagen de una curva definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ por un cubrimiento, la Proposición 5.7 asegura que la curva $\overline{R}$ está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos de $\Gamma_{\mathscr{B}}$ de tal suerte que $\Gamma_{\mathscr{B}} = \gamma_1 \Gamma \cup \ldots \cup \gamma_s \Gamma$. Definimos

$$\Gamma_0 := \cap_{i=1}^{s} \gamma_i \Gamma \gamma_i^{-1}$$

y observamos que Γ_0 es un subgrupo normal libre de torsión y de índice finito de $\Gamma_{\mathscr{B}}$ y también un subgrupo de índice finito de Γ. Denotaremos por C_0 la superficie de Riemann Δ/Γ_0 y por $\pi_1 : C_0 \to C$ y $\pi_0 : C_0 \to R$ los cubrimientos dados por las inclusiones $\Gamma_0 \leq \Gamma$ y $\Gamma_0 \leq \Gamma_{\mathscr{B}}$ respetivamente. Los cubrimientos π_1 y π_0 se extienden a cubrimientos $\bar{\pi}_1$ y $\bar{\pi}_0$

entre las respectivas compactificaciones de modo que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{C}_0 \arrow[dl, "\bar{\pi}_1"'] \arrow[dr, "\bar{\pi}_0"] & \\
\overline{C} \arrow[rr, "\beta"] & & \overline{R}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Como C es una curva aritmética los valores de ramificación de $\bar{\pi}_1$, que están contenidos en $\overline{C} - C$, son puntos definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Sigue por la Proposición 5.7 que tanto la curva $\overline{C}_0$ como la aplicación $\bar{\pi}_1$ están definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. A su vez, la aritmeticidad de $\overline{C}_0$ implica que sus automorfismos son aplicaciones aritméticas y, de esta manera, podemos concluir que el cubrimiento normal $\bar{\pi}_0$ es también aritmético. Ahora, siendo la imagen por $\bar{\pi}_0$ de la preimagen por $\bar{\pi}_1$ de $\overline{C} - C$, se obtiene que los puntos en $\overline{R} - R$ están definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$; esto nos dice que R es aritmética. Además, como el conjunto de los valores de ramificación de $\bar{\pi}_0$ está definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ y contiene a los valores de ramificación del cubrimiento universal $\Delta \to R$, cada punto q_i está definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. De esta forma hemos obtenido que $\mathcal{O}_{\mathscr{B}}$ es una orbifold aritmética.

Para demostrar la segunda parte del teorema debemos proceder cuidadosamente. Como hemos descrito en la subsección anterior, a partir de f podemos construir una nueva familia $f_3 : V_3 \to C_3$ siendo $(\mathscr{B}, \pi)$ el cobertor universal de V_3. Además, la familia f_3 (o, más específicamente, la aplicación Φ_{f_3}) nos permite construir, de forma única, la fibración

$$\hat{f}_3 : \hat{V}_3 := \bar{\Phi}^*_{f_3} \bar{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n} \to \overline{C}_3.$$

Como g y el género de C son supuestos mayores que uno, entonces la Proposición 5.16 asegura que $\hat{V}_3$ es una superficie algebraica proyectiva de tipo general.

Afirmación 1. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})$ y $\Psi : \bar{\mathscr{M}}^{[3]}_{g,n} \to \bar{\mathscr{M}}_{g,n}$ es la aplicación de grado finito dada por el olvido de la estructura de nivel, entonces

$$\Psi \circ (\bar{\Phi}_{f_3})^{\sigma} = \Psi \circ \bar{\Phi}_{f_3^{\sigma}}.$$

En particular, la aplicación $(\bar{\Phi}_{f_3})^{\sigma}$ está únicamente determinada por $\bar{\Phi}_{f_3^{\sigma}}$ salvo finitas opciones.

Si la igualdad es cierta en C_3^{σ} entonces también lo será en $\overline{C_3^{\sigma}}$ por continuidad. Supongamos que $y = \sigma(x) \in C_3^{\sigma}$. Entonces

$$\Psi \circ (\bar{\Phi}_{f_3})^{\sigma}(\sigma(x)) = \Psi \circ ((\bar{\Phi}_{f_3})(x))^{\sigma} = [(f_3^{-1}(x))^{\sigma}] = [(f_3^{-1})^{\sigma}(\sigma(x))]$$

y
$$\Psi \circ \bar{\Phi}_{f_3^\sigma}(\sigma(x)) = [(f_3^\sigma)^{-1}(\sigma(x))].$$
La afirmación sigue desde el hecho de que $(f_3^{-1})^\sigma = (f_3^\sigma)^{-1}$ para todo σ.

Supongamos ahora que $\mathcal{O}_{\mathscr{B}}$ es una orbifold aritmética. La inclusión $\Gamma_3 \leq \Gamma_{\mathscr{B}}$ induce un cubrimiento ramificado entre superficies de Riemann compactas que denotamos por $\beta : \overline{C}_3 \to \overline{R}$. Entonces, siendo $\overline{R}$ una curva definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ y siendo los valores de ramificación de β puntos definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, la Proposición 5.7 asegura que tanto la curva $\overline{C}_3$ como la aplicación β están definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Nótese que el conjunto $\overline{C}_3 - C_3$ está definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ por ser la preimagen por β del conjunto $\overline{R} - R$. Obtenemos que C_3 es aritmética.

Ahora, como C_3 es una curva aritmética, la colección $\{C_3^\sigma\}$ contiene finitas clases de isomorfía para $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})$. Además, el Teorema 3.1 nos permite asegurar que existe sólo una colección finita de familias no-isotriviales no-equivalentes de tipo (g, n) sobre C_3^σ para cada $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})$. En particular, el conjunto de clases de equivalencia de familias de la forma
$$f_3^\sigma : V_3^\sigma \to C_3^\sigma$$
es finito. Más aún, como la superficie algebraica proyectiva
$$\widehat{V_3^\sigma} = \bar{\Phi}^*_{f_3^\sigma} \overline{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n}$$
está únicamente determinada, módulo isomorfismo, por f_3^σ se puede asegurar que el conjunto
$$\{\widehat{V_3^\sigma} : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$
contiene un número finito de clases de isomorfía. Además, como $\overline{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n}$ es una variedad algebraica proyectiva definida sobre $\mathbb{Q}$ (ver Teorema 5.14), vale que
$$(\hat{V}_3)^\sigma = (\bar{\Phi}^*_{f_3} \overline{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n})^\sigma = (\bar{\Phi}^\sigma_{f_3})^* (\overline{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n})^\sigma = (\bar{\Phi}^\sigma_{f_3})^* \overline{\mathscr{C}}'^{[3]}_{g,n}.$$
Ahora la Afirmación 1 nos permite asegurar que la colección
$$\{(\widehat{V}_3)^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$
también contiene finitas clases de isomorfía.

Recalcamos que la superficie algebraica proyectiva $\hat{V}_3$ tiene una normalización
$$\pi_3^N : \hat{V}_3^N \to \hat{V}_3$$
únicamente determinada por $\hat{V}_3$ módulo isomorfismo y, a su vez, como $\hat{V}_3^N$ es una superficie algebraica proyectiva normal, existe una resolución de singularidades de $\hat{V}_3^N$
$$\pi_3^M : Y \to \hat{V}_3^N$$

únicamente determinada por $\hat{V}_3^N$ módulo isomorfismo (ver Teoremas 4.4 y 4.5).

Afirmación 2. La superficie Y es aritmética.

Nótese que Y^σ está únicamente determinada por $(\hat{V}_3)^\sigma$ módulo isomorfismos para cada $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})$. En consecuencia, la colección

$$\{Y^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$

contiene finitas clases de isomorfía. Ahora, la Afirmación 2 se sigue directamente desde el Teorema 5.2.

Como $V_3 \subset \hat{V}_3$ no contiene ningún punto singular, la aplicación

$$\lambda := \pi_3^N \circ \pi_3^M : Y \to \hat{V}_3$$

induce un isomorfismo entre V_3 y $U_3 := \lambda^{-1}(V_3)$. La aplicación

$$h := \hat{f}_3 \circ \lambda : Y \to \overline{C}_3$$

es una fibración admitiendo genéricamente como fibras superficies de Riemann compactas de género al menos dos. Ahora, por el teorema finitud de Arakelov (ver [**12**, Teorema 3.1] para una versión que se ajusta adecuadamente a este contexto) podemos asegurar que la colección

$$\{h^\sigma : Y^\sigma \to \overline{C}_3^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$

contiene finitos elementos módulo equivalencia de fibrados. De esta forma, por el Teorema 5.3 la aplicación $h : Y \to \overline{C}_3$ es aritmética.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $Y, \overline{C}_3$ y h están definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Afirmación 3. U_3 es aritmético.

Como Y está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ sólo es necesario chequear que el cerrado de Zariski $Y - U_3$ está definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. El conjunto $Y - U_3$ corresponde a la preimagen por h del conjunto $\overline{C}_3 - C_3$ (y por lo tanto definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$) junto con la imagen $\mathcal{I}$ de las n secciones globales holomorfas y disjuntas $s_1, \ldots, s_n$ de la familia restricción $h : h^{-1}(C_3) \to C_3$. Sea $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\overline{\mathbb{Q}})$. Como

$$h \circ s_i^\sigma = (h \circ s_i)^\sigma = id^\sigma = id$$

se obtiene que s_i^σ es nuevamente una sección de h y por lo tanto la colección $\{s_i^\sigma\}$ contiene a lo sumo n elementos. Esto implica, por el Teorema 5.7, que s_i está definida en una extensión de grado finito de $\overline{\mathbb{Q}}$; por tanto, sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Ahora, como $\mathcal{I}$ es la unión de imágenes de una curva por una aplicaciones, todas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, podemos asegurar que $\mathcal{I}$ está definido sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Esto justifica la afirmación.

Observamos que la aplicación restricción $h : U_3 \to C_3$, que es una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann cuya base y fibras son de tipo finito hiperbólico, es aritmética. En consecuencia, siendo el cobertor universal de U_3, concluimos que $(\mathscr{B}, \pi)$ es un dominio de Bergman de tipo aritmético. Esto concluye la demostración del teorema.

5.3.3. Demostración del Corolario 5.12. Supongamos que $\Gamma_{\mathscr{B}}$ es conmensurable con un grupo triangular $\Delta(a, b, c)$ que es hiperbólico, es decir, con a, b, c enteros positivos o el infinito tales que $1/a+1/b+1/c < 1$. Sea H el subgrupo de índice finito común de $\Gamma_{\mathscr{B}}$ y $\Delta(a, b, c)$. Por la Proposición 1.13 podemos suponer que H es libre de torsión. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ elementos de $\Gamma_{\mathscr{B}}$ tales que $\Gamma_{\mathscr{B}} = \gamma_1 H \cup \ldots \cup \gamma_s H$. Definimos $N := \cap_{i=1}^{s} \gamma_i H \gamma_i^{-1}$ y observamos que éste es un subgrupo normal libre de torsión de índice finito de $\Gamma_{\mathscr{B}}$ y también un subgrupo de índice finito de $\Delta(a, b, c)$.

Denotaremos por C la superficie de Riemann Δ/N y por $\overline{C}$ su compactificación. Notamos que $\Delta/\Delta(a, b, c)$ es isomorfo $\mathbb{P}^1 - \Sigma$ donde Σ es un subconjunto de $\{0, 1, \infty\}$ cuya cardinalidad coincide con el número de enteros a, b, c que son iguales a ∞. Más aún, la inclusión $N < \Delta(a, b, c)$ induce una función de Belyi $\beta : \overline{C} \to \mathbb{P}^1$ de tal suerte que $C = \overline{C} - \beta^{-1}(\Sigma)$. El Teorema 5.6 asegura que $\overline{C}$ es una curva aritmética. Además, dado que las funciones de Belyi son aritméticas, los puntos $\overline{C} - C$ están definidos sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Ahora, procediendo de forma análoga a como hicimos en la demostración del teorema (ver p. 90) se puede concluir que $\mathcal{O}_{\mathscr{B}}$ es una orbifold aritmética y el resultado sigue por el Teorema 5.11.

5.4. Superficies Aritméticas: una caracterización

El Teorema 5.10 asegura que una superficie algebraica proyectiva minimal de tipo general es aritmética si y sólo si está provista de un pincel de Lefschetz $f : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ cuyos valores críticos están definidos en $\overline{\mathbb{Q}}$. En tal caso, si U es el abierto de Zariski obtenido después de remover los puntos base y las fibras singulares de f, entonces la restricción

$$f : U \to \mathbb{P}^1 - \mathrm{crit}(f)$$

es una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann que es aritmética y, por tanto, el cobertor universal de U es un dominio de Bergman de tipo aritmético.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema, el cual establece que la implicancia anterior es, de hecho, una equivalencia. En otras palabras, el siguiente resultado asegura que la aritmeticidad de una superficie algebraica proyectiva está completamente determinada por los cobertores universales de sus abiertos de Zariski.

Teorema 5.17. *Sea S una superficie algebraica proyectiva minimal y de tipo general. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *S es aritmética.*
(b) *S contiene un abierto de Zariski cuyo cobertor universal es isomorfo a un dominio de Bergman de tipo aritmético.*

Demostración. Supongamos que S contiene un abierto de Zariski U cuyo cobertor universal $\mathscr{B}$ es un dominio de Bergman de tipo aritmético. Entonces existe una familia holomorfa no-isotrivial $f : V \to C$ de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico que es aritmética de modo que $\mathscr{B}$ es el cobertor universal de la superficie casi-proyectiva V.

En virtud de la Observación 4 de la p. 68, podemos asumir que C y las fibras de f tienen género al menos dos. Ahora, esgrimiendo los mismos argumentos utilizados para demostrar la Proposición 5.16, podemos asegurar que la clausura de Zariski de V es una superficie de tipo general.

Supongamos que la sucesión exacta de grupos asociada a f es

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_2 \longrightarrow \mathbb{G}_2 \xrightarrow{\Theta} \Gamma_2 \longrightarrow 1$$

y que $U \cong \mathscr{B}/\mathbb{G}_1$ para cierto subgrupo $\mathbb{G}_1$ de $\mathrm{Aut}(\mathscr{B})$. Denotemos $\mathbb{G}_{12}$ el grupo intersección $\mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}_2$, por $\mathscr{V}$ la respectiva superficie compleja cociente $\mathscr{B}/\mathbb{G}_{12}$ y por π_1 y π_2 las aplicaciones holomorfas inducidas por las inclusiones $\mathbb{G}_{12} \leq \mathbb{G}_1$ y $\mathbb{G}_{12} \leq \mathbb{G}_2$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{V} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ U & & V \end{tikzcd}$$

Afirmación. $\pi_1 : \mathscr{V} \to U$ y $\pi_2 : \mathscr{V} \to V$ son aplicaciones holomorfas de grado finito entre superficies casi-proyectivas.

Por el Teorema 4.13, el grupo $\mathbb{G}_2$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B})$ y por lo tanto $\mathbb{G}_{12}$ tiene índice finito en $\mathbb{G}_1$. Sigue que π_1 es una aplicación holomorfa de grado finito. Ahora, como la imagen de π_1 es una superficie casi-proyectiva, el Teorema de la Existencia de Riemann (ver [**54**, p. 227] para una formulación adecuada en este contexto) nos permite concluir que $\mathscr{V}$ tiene una única estructura de superficie casi-proyectiva de tal forma que π_1 es un morfismo; esto prueba la afirmación para π_1. Además, si $\bar{\mathscr{V}}$ y $\bar{V}$ denotan las clausuras de Zariski de $\mathscr{V}$ y V respectivamente entonces, como $\bar{V}$ es compacto y de tipo general, el Teorema 4.9

asegura que $\pi_2 : \bar{\mathscr{V}} \to \bar{V}$ es una aplicación meromorfa entre superficies algebraicas proyectivas y por tanto racional. Sigue que $\pi_2 : \mathscr{V} \to V$ es una aplicación regular entre variedades algebraicas casi-proyectivas de la misma dimensión y, en consecuencia, en un abierto de Zariski cada punto de V tiene un número finito de preimágenes (ver, por ejemplo [**55**, p. 46]). Esto justifica la afirmación.

La restricción del homomorfismo $\Theta : \mathbb{G}_2 \to \Gamma_2$ a $\mathbb{G}_{12}$ da lugar a una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_2 \cap \mathbb{G}_{12} \longrightarrow \mathbb{G}_{12} \longrightarrow \Theta(\mathbb{G}_{12}) \longrightarrow 1,$$

que induce una familia holomorfa no-isotrivial de superficies de Riemann de tipo finito hiperbólico; la denotaremos por $f' : \mathscr{V} \to \mathscr{C}$. Ahora, como hemos hecho en la demostración del Teorema 5.11, a partir de f' podemos construir una nueva familia $f_3' : \mathscr{V}_3 \to \mathscr{C}_3$ con la propiedad de que la curva $\mathscr{C}_3$ está dotada de una aplicación holomorfa

$$\Phi_{f_3'} : \mathscr{C}_3 \to \mathscr{M}_{g,n}^{[3]}$$

donde (g, n) es el tipo de f' de tal forma que el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} V & \longleftarrow & \mathscr{V} & \longleftarrow & \mathscr{V}_3 \\ f \big\downarrow & & \big\downarrow f' & & \big\downarrow f_3' \\ C & \longleftarrow & \mathscr{C} & \longleftarrow & \mathscr{C}_3 \end{array}$$

es conmutativo, donde las fechas horizontales son cubrimientos normales no ramificados de grado finito. Observamos que las tres familias del diagrama anterior comparten el mismo cobertor universal.

Ahora, como también hemos hecho en la demostración del Teorema 5.11, podemos construir una fibración

$$\hat{f}_3 : \hat{\mathscr{V}}_3 := \bar{\Phi}_{f_3'}^{*} \bar{\mathscr{C}}_{g,n}^{\prime[3]} \to \bar{\mathscr{C}}_3$$

sobre $\bar{\mathscr{C}}_3$ poseyendo superficies de Riemann estables y compactas de género g como fibras.

Como estamos asumiendo que C es una curva aritmética, el Teorema 5.7 implica que la curva $\mathscr{C}_3$ también es aritmética. Más aún, este hecho junto con el Teorema 3.1 implican que la colección

$$\{(\mathscr{V}_3)^{\sigma} : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$

contiene un número finito de clases de isomorfía. Como $\hat{\mathscr{V}}_3$ está únicamente determinado por f_3, obtenemos que la colección

$$\{\widehat{\mathscr{V}_3^{\sigma}} : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$

también contiene un número finito de clases de isomorfía. Ahora, haciendo uso de la Afirmación 1 en la demostración del Teorema 5.11, concluimos que

$$\{(\hat{\mathscr{V}_3})^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$$

contiene un número finito de clases de isomorfía.

Sea Y la única resolución minimal de singularidades de la normalización de $\hat{\mathscr{V}_3}$. La superficie no-singular Y está únicamente determinada, módulo isomorfismo, por $\hat{\mathscr{V}_3}$ y por tanto la colección $\{Y^\sigma : \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C})\}$ contiene finitas clases de isomorfía. El Teorema 5.2 implica que Y es aritmética .

Nótese que Y está provista de una aplicación holomorfa

$$\Pi : Y \to \hat{\mathscr{V}_3}$$

que induce un isomorfismo entre $\mathscr{V}_3$ y $\Pi^{-1}(\mathscr{V}_3)$. En consecuencia, hay una aplicación holomorfa

$$Y \supset \Pi^{-1}(\mathscr{V}_3) \to \mathscr{V}_3 \to \mathscr{V} \to U \subset S.$$

Como estamos suponiendo que la superficie algebraica proyectiva S es de tipo general, el Teorema 4.9 nos permite asegurar que la anterior es, de hecho, una aplicación $Y \to S$ meromorfa entre superficies algebraicas proyectivas y por tanto racional. Ahora, como Y es aritmética y S es minimal y de tipo general el Teorema 5.9 implica que S es aritmética. Esto concluye la demostración.

$\square$

Observación 6. *Destacamos que la situación para superficies algebraicas difiere bastante de la de curvas, para las cuales el cobertor universal sólo depende del género.*

CAPÍTULO 6

Fibraciones de Kodaira

En este capítulo estudiaremos una clase distinguida de familias de superficies de Riemann, conocidas como fibraciones de Kodaira.

6.1. Fibraciones de Kodaira Aritméticas

DEFINICIÓN 67. Sea S una superficie compleja compacta y C una superficie de Riemann compacta. Una fibración de Kodaira es una familia holomorfa no-isotrivial $S \to C$ de superficies de Riemann compactas.

Estas fibraciones fueron introducidas por Kodaira como un ejemplo para probar que la signatura

$$\tau(S) := \frac{1}{3}(c_1^2(S) - c_2(S))$$

de un fibrado diferenciable $S \to C$ (donde $c_1^2(S)$ y $c_2(S)$ son los números de Chern de S) no necesariamente es multiplicativa. Ver [**45**].

Una fibración de Kodaira $S \to C$ es de género g si sus fibras son de ese género. Son hechos bien conocidos que $g \geq 3$, que el género de C es al menos dos y que S es una superficie algebraica proyectiva de tipo general.

El espacio de módulos $\mathscr{M}_g$ contiene muchas curvas algebraicas proyectivas. En efecto, como existe una compactificación de $\mathscr{M}_g$ (conocida como la compactificación de Satake) que es algebraica proyectiva y cuya frontera tiene codimensión dos (ver, por ejemplo [**33**, p. 45]), tales curvas pueden ser obtenidas después de intersecar $\mathscr{M}_g$ con hiperplanos en posición suficientemente general. Más aún, como el lugar singular $\mathrm{Sing}(\mathscr{M}_g)$ de $\mathscr{M}_g$ para $g \geq 3$ tiene codimensión al menos dos, podemos suponer que los puntos de dichas curvas representan clases de isomorfía de superficies de Riemann sin automorfismos no triviales.

Las fibraciones de Kodaira se obtienen esencialmente de la siguiente forma. Consideremos una superficie de Riemann compacta C de género al menos dos provista de una aplicación holomorfa no-constante $\alpha : C \to$

$\mathscr{M}_g$ y denotemos por $[S_t]$ el punto $\alpha(t)$ para $t \in C$. Si

$$\alpha(C) \cap \mathrm{Sing}(\mathscr{M}_g) = \emptyset,$$

entonces consideramos el pull-back de la curva universal $\pi_g : \mathscr{C}_g \to \mathscr{M}_g$ por α para obtener un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \alpha^*\mathscr{C}_g \arrow[r] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{C}_g \arrow[d, "\pi_g"] \\ C \arrow[r, "\alpha"] & \mathscr{M}_g \end{tikzcd}$$

siendo π_1 es la proyección en la primera coordenada. De esta forma, la aplicación

$$\pi_1 := \alpha^*\mathscr{C}_g \to C$$

es una fibración de Kodaira admitiendo como fibra sobre $t \in C$ la superficie de Riemann S_t. Más generalmente, si

$$\alpha(C) \cap \mathrm{Sing}(\mathscr{M}_g) \neq \emptyset$$

entonces el proceso anterior todavía puede dar origen a una fibración de Kodaira pero después de reemplazar la curva C por un cubrimiento apropiado de ella, como veremos en Sección 6.2.

TEOREMA 6.1. *Sea $f : S \to C$ una fibración de Kodaira y k un subcuerpo algebraicamente cerrado del cuerpo de los números complejos. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *S está definida sobre k.*
(b) *C está definida sobre k.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que C es una curva algebraica proyectiva definida sobre k. Entonces $C = C^\sigma$ y se tiene una fibración de Kodaira $f^\sigma : S^\sigma \to C$ para $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$. El Teorema 3.1 asegura que sólo existe un número finito de clases de isomorfía de fibraciones de Kodaira sobre C y por tanto la colección $\{S^\sigma\}$ contiene finitas clases de isomorfía para $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$. Sigue por el Teorema 5.2 que S está definida sobre k.

Para probar la implicancia contraria, comenzamos recalcando que cada fibración de Kodaira es hiperbólica (es decir, no existen aplicaciones $\mathbb{C} \to S$ holomorfas no constantes; ver, por ejemplo [**15**]). Como S es además una variedad de Kähler, se tiene que su divisor canónico es amplio [**11**, p. 65] y esto implica que existe sólo un número finito de curvas algebraicas proyectivas R de género mayor o igual a dos que pueden ser obtenidas como imagen de un morfismo sobreyectivo $S \to R$. Ver [**36**, Teorema 2].

Asumamos ahora que S está definida sobre k. Entonces $S^\sigma = S$ y se tiene una fibración de Kodaira $f^\sigma : S \to C^\sigma$ para $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$. Como el género de C es al menos dos, los argumentos anteriores muestran que la colección $\{C^\sigma\}$ con $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/k)$ contiene sólo un número finito de clases de isomorfía. Sigue por el Teorema 5.2 que C está definida sobre k. $\square$

En lo que sigue, si una fibración de Kodaira satisface alguna de las condiciones del teorema anterior, entonces diremos que ella está definida sobre el cuerpo k. Si tomamos k como el cuerpo de números algebraicos, entonces obtenemos una fibración de Kodaira aritmética.

Recalcamos que los Teoremas 4.11 y 4.12 implican que el cobertor universal de una fibración de Kodaira $f : S \to C$ es isomorfo a un dominio de Bergman admisible, digamos $(\mathscr{B}, \pi)$ con $D_t = \pi^{-1}(t)$ para $t \in \Delta$. Más aún, si $\mathbb{G}$ es el grupo cobertor universal de S entonces, restringiendo la sucesión exacta de grupos asociada a $(\mathscr{B}, \pi)$, obtenemos una sucesión exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

donde Γ es un grupo fuchsiano actuando en Δ de tal suerte que $C \cong \Delta/\Gamma$ y $\mathbb{K}$ es un grupo que actúa en cada casi-disco D_t como un grupo casi-fuchsiano $K_t \cong \mathbb{K}$ de tal suerte que $D_t/K_t \cong f^{-1}(t)$ para todo $t \in C$.

TEOREMA 6.2. *Sea k un subcuerpo algebraicamente cerrado del cuerpo de los números complejos. Sea $f_2 : S_2 \to C_2$ una fibración de Kodaira definida sobre k y S_1 una superficie algebraica proyectiva tal que los cobertores universales de S_1 y S_2 sean isomorfos. Entonces S_1 también es una superficie definida sobre k.*

Los argumentos utilizados para probar el Teorema 5.17 se pueden adaptar para asegurar que las afirmaciones

(a) la fibración $S \to C$ es aritmética.
(b) el cobertor universal de S es un dominio de Bergman de tipo aritmético.

son equivalentes y también para demostrar el teorema anterior. Sin embargo, he decidido incluir en este trabajo otra demostración (como está expuesta en [**27**]) porque es más sencilla de seguir al no requerir el manejo de la maquinaria de la Sección 5.3.

DEMOSTRACIÓN. Denotaremos por $(\mathscr{B}_i, \pi_i)$ el cobertor universal de S_i y supondremos que existe un isomorfismo $f : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ entre ellos. Sea $\mathbb{G}_i$ un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_i, \pi_i)$ tal que $\mathscr{B}_i/\mathbb{G}_i \cong S_i$. Por el Teorema 4.13 sabemos que $\mathbb{G}_2$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$. Afirmamos que $\mathbb{G}_1$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_1)$. En efecto, como $\mathscr{B}_1/\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_1) \cong \mathscr{B}_2/\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$ y como por el Teorema 4.13 el grupo $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$ actúa de forma propiamente discontinua sobre $\mathscr{B}_2$, la proyección $S_1 = \mathscr{B}_1/\mathbb{G}_1 \to \mathscr{B}_1/\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_1)$ es una aplicación holomorfa entre espacios analíticos complejos normales y compactos; esto implica que $\mathbb{G}_1$ tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_1)$.

Definimos $\mathbb{G}_3 = f\mathbb{G}_1 f^{-1}$ subgrupo de índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$. Sea S_3 la superficie compleja cociente $\mathscr{B}_2/\mathbb{G}_3$ y $\pi_3 : \mathscr{B}_2 \to S_3$ su cubrimiento universal. Nótese que por construcción $S_1 \cong S_3$ y, en consecuencia, S_3 es una superficie algebraica proyectiva de tipo general. Como $\mathbb{G}_2$ y $\mathbb{G}_3$ tienen índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$, su intersección $\mathbb{G}_{23}$ también tiene índice finito en $\mathrm{Aut}(\mathscr{B}_2)$. Denotaremos por S_{23} la superficie compleja cociente $\mathscr{B}_2/\mathbb{G}_{23}$ y $\pi_{23} : \mathscr{B}_2 \to S_{23}$ su cubrimiento universal. Notamos que S_{23} está dotada de dos cubrimientos de grado finito $\pi_i' : S_{23} \to S_i$ con $i = 2, 3$. Es claro que S_{23} es compacta y por la Proposición 4.1 se tiene que S_{23} es algebraica proyectiva. La inclusión $\mathbb{G}_{23} \leq \mathbb{G}_2$ induce una sucesión exacta

$$1 \longrightarrow \mathbb{K}_{23} \longrightarrow \mathbb{G}_{23} \longrightarrow \Gamma_{23} \longrightarrow 1$$

por restricción del homomorfismo $\mathbb{G}_2 \to \Gamma_2$ y de esta forma la curva $C_{23} = \Delta/\Gamma_{23}$ cubre con grado finito a C_2. Como S_2 está definida sobre k, el Teorema 6.1 nos permite asegurar que C_2 también está definida sobre k y, a su vez, por la Proposición 5.7 se tiene que C_{23} está definida en k.

Afirmamos que la aplicación holomorfa $f_{23} : S_{23} \to C_{23}$ es una fibración de Kodaira. En efecto, para chequear esta afirmación es suficiente verificar que sus fibras son conexas. Si fijamos $t \in C_2$, entonces $f_{23}^{-1}(t)$ está dado, módulo isomorfismo, por el cociente D_t/K_t' donde K_t' es un subgrupo de índice finito de K_t y como $D_t/K_t' = \pi_{23}(D_t)$ y el casi-disco D_t es conexo, concluimos que las fibras de f_{23} son todas conexas. De esta forma, nuevamente por el Teorema 6.1, podemos afirmar que S_{23} otra superficie algebraica proyectiva definida sobre k. Finalmente, como S_3 es de tipo general y puede ser vista como imagen por π_3' de S_{23}, sigue por el Teorema 5.4 que la superficie S_3 está definida sobre k y por lo tanto S_1 también. Esto concluye la demostración. $\square$

COROLARIO 6.3. *Sean $f_1 : S_1 \to C_1$ y $f_2 : S_2 \to C_2$ dos fibraciones de Kodaira tales que sus cobertores universales son isomorfos. Entonces f_1 es aritmética si y sólo si f_2 lo es.*

El corolario anterior nos dice que la aritmeticidad de una fibración de Kodaira sólo depende de la clase de isomorfía de su cobertor universal.

6.2. Cobertores universales no equivalentes

En esta sección construiremos una colección biparamétrica de fibraciones de Kodaira de género $g \geq 4$ y gracias a esto exhibiremos una colección no numerable de dominios de Bergman no equivalentes.

Sean E y C las superficies de Riemann de géneros uno y dos dadas por las curvas planas afines definidas por los polinomios $y^2 = x^3 - 1$ y $y^2 = x^6 - 1$ respectivamente. Recalcamos que la curva elíptica E está provista de una estructura de grupo abeliano siendo el punto al infinito ∞ su elemento neutro; denotaremos por $\oplus$ su ley de grupo.

Consideramos el cubrimiento de grado dos

$$\pi : C \to E \qquad (x, y) \mapsto (x^2, y),$$

el cual ramifica sobre $s_1 = (0, i)$ y $s_2 = (0, -i)$ con $i^2 = -1$.

Sea $r \geq 2$ y $a_2, \ldots, a_r$ puntos en E distintos de la identidad ∞ y distintos dos a dos tales que:

(a) $a_i \neq \pi(s_1) \ominus \pi(s_2), \pi(s_2) \ominus \pi(s_1)$ para $2 \leq i \leq r$ y
(b) $a_i \ominus a_j \neq \pi(s_1) \ominus \pi(s_2), \pi(s_2) \ominus \pi(s_1)$ para $2 \leq i \neq j \leq r$.

Proposición 6.4. *El espacio analítico complejo uno-dimensional*

$$X_r = \{(p_1, \ldots, p_r) \in C^r : \pi(p_1) = \pi(p_i) \oplus a_i,\ 2 \leq i \leq r\}$$

tiene estructura de superficie de Riemann compacta de género $r2^{r-1}+1$ y está contenida en $C^r - \Delta_r$ donde Δ_r denota la diagonal en C^r compuesta por aquellas $r-$uplas con dos entradas coincidentes.

Demostración. Como los puntos $a_j \neq \infty$ son distintos dos a dos, entonces es fácil ver que X_r está contenida en $C^r - \Delta_r$. Si $\Psi : C^r \to E^{r-1}$ es la aplicación holomorfa definida mediante

$$(p_1, \ldots, p_r) \mapsto (\pi(p_1) \ominus \pi(p_2) \ominus a_2, \ldots, \pi(p_1) \ominus \pi(p_r) \ominus a_r),$$

entonces $X_r = \Psi^{-1}(\infty, \ldots, \infty)$. Se tiene que en cartas locales adecuadas la matriz jacobiana de Ψ es

$$J = \begin{pmatrix} \pi'(p_1) & \ominus\pi'(p_2) & 0 & \ldots & 0 \\ \pi'(p_1) & 0 & \ominus\pi'(p_3) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi'(p_1) & 0 & 0 & \ldots & \ominus\pi'(p_r) \end{pmatrix}$$

y por tanto los puntos en C^r donde J tiene rango menor que $r-1$ son aquéllos de la forma $(p_1, \ldots, p_r)$ tales que $\{p_i, p_j\} = \{s_1, s_2\}$ para ciertos $2 \leq i \neq j \leq r$. Las condiciones impuestas a los puntos $a_2 \ldots, a_r$ aseguran que estos puntos no pertenecen a X_r y así se tiene que X_r es no-singular.

La aplicación $\pi_r : (p_1, \ldots, p_r) \mapsto (p_1, \ldots, p_{r-1})$ induce un cubrimiento de grado dos entre X_r y X_{r-1}. Los puntos de ramificación son tales que $p_r \in \{s_1, s_2\}$ y, como los puntos de ramificación de π no pueden aparecer a la vez en las coordenadas de ningún punto de X_r, vale que π_r ramifica en 2^r puntos. En particular, se tienen cubrimientos de grado dos

$$X_r \to X_{r-1} \to \cdots \to X_2 \to X_1 = C$$

y así X_r es conexa para todo r. Afirmamos que $g(X_r) = r2^{r-1} + 1$. En efecto, la fórmula de Riemann-Hurwitz para π_{r+1} implica que

$$2g(X_{r+1}) - 2 = 2(2(r2^{r-1} + 1) - 2) + 2^{r+1}(2 - 1)$$

y así $g(X_{r+1}) = (r + 1)2^r - 1$; concluimos por inducción sobre r. $\square$

Sean $p \geq 2$ primo y $r \geq 2$ par. Consideramos una superficie de Riemann compacta $C_0 \cong \Delta/K_g$ de género g provista de un automorfismo $\tau_0 : C_0 \to C_0$ de orden p con exactamente r puntos fijos de tal suerte que el género de la superficie de Riemann cociente $C_0/\langle\tau_0\rangle \cong \Delta/\Gamma_{2,r}$ sea dos (la existencia de una superficie de Riemann con estos requerimientos fue vista en el Ejemplo 1.15). Recalcamos que por la fórmula de Riemann-Hurwitz

$$2g - 2 = 2p + r(p - 1).$$

Denotaremos por R_0^* la superficie de Riemann obtenida de $R_0 \cong C_0/\langle\tau_0\rangle$ luego de remover los r valores de ramificación de $C_0 \to R_0$. Las superficies de Riemann C_0 y R_0^* serán las bases para los espacios de Teichmüller T_g y $T_{2,r}$ respectivamente. El símbolo τ_0 también denotará el grupo generado por τ_0. En la Sección 2.4 vimos que existe un isomorfismo de variedades analíticas complejas entre $T_{2,r}$ y $T_g(\tau_0)$ induciendo un homomorfismo de grupos

$$\Phi : \mathrm{Mod}_g(\tau_0) \to \mathrm{Mod}_{2,r}$$

de tal suerte que $N := \mathrm{Im}(\Phi)$ tiene índice finito en $\mathrm{Mod}_{2,r}$ y

$$\mathrm{Mod}_g(\tau_0)/\langle\tau_0\rangle \cong N.$$

El homomorfismo de grupos

$$\mathrm{Mod}_g(\tau_0) \hookrightarrow \mathrm{Mod}_g \twoheadrightarrow \mathrm{Mod}_g/\mathrm{Mod}_g^{[3]}$$

tiene como núcleo la intersección

$$\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0) := \mathrm{Mod}_g^{[3]} \cap \mathrm{Mod}_g(\tau_0)$$

y así $\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0)$ es un subgrupo normal de índice finito de $\mathrm{Mod}_g(\tau_0)$. Denotamos por $N' := \Phi(\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0))$.

Lema 6.5. *N' es un subgrupo de índice finito en $\mathrm{Mod}_{2,r}$.*

Demostración. Como $\tau_0 \notin \mathrm{Mod}_g^{[3]}$ por no tener este grupo torsión, el homomorfismo restricción

$$\Phi : \mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0) \to N$$

es inyectivo y así N contiene a N' como subgrupo. Como $\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0)$ tiene índice finito en $\mathrm{Mod}_g(\tau_0)$, existen $h_1, \ldots, h_s \in \mathrm{Mod}_g(\tau_0)$ tales que

$$\mathrm{Mod}_g(\tau_0) = h_1\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0) \cup \ldots \cup h_s\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0).$$

Sigue que

$$\Phi(\mathrm{Mod}_g(\tau_0)) = \Phi(h_1)\Phi(\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0)) \cup \ldots \cup \Phi(h_s)\Phi(\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0))$$

y así N' es un subgrupo de índice finito en N. El resultado sigue desde que N tiene índice finito en $\mathrm{Mod}_{2,r}$. $\square$

En la Proposición 6.4 vimos que la curva X_r está contenida en $C^r - \Delta_r$. Por otro lado, la aplicación $\Phi : C^r - \Delta_r \to \mathscr{M}_{2,r}$ definida por

$$(p_1, \ldots, p_r) \mapsto [C - \{p_1, \ldots, p_r\}]$$

es holomorfa y tiene fibras finitas [**25**, Lema 1]. De esta forma, la restricción Φ a X_r es una aplicación holomorfa entre las superficies de Riemann compactas X_r y $\Phi(X_r)$. Como Φ tiene fibras finitas, obtenemos que X_r está provista de una aplicación holomorfa y no-constante $\Phi : X_r \to \mathscr{M}_{2,r}$.

Sea Γ un grupo fuchsiano de tal suerte que $X_r \cong \Delta/\Gamma$ y $\pi : \Delta \to X_r$ el cubrimiento universal de X_r. Si $\Theta : \Gamma \to \mathrm{Mod}_{2,r}$ es la monodromía asociada a π y $\Gamma_3 := \Theta^{-1}(N')$ entonces Φ se levanta a una aplicación holomorfa

$$\tilde{\Phi} : X_r^{[3]} := \Delta/\Gamma_3 \to T_{2,r}/N'$$

y podemos construir el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, "\hat{\Phi}"] \arrow[d] & T_{2,r} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & T_g(\tau_0) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & T_g \arrow[d] \\
X_r^{[3]} \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\zeta_r"] & T_{2,r}/N' \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi''"] & T_g(\tau_0)/\mathrm{Mod}_g^{[3]}(\tau_0) \arrow[r, "\tilde{i}"] & \mathscr{M}_g^{[3]} \arrow[d] \\
X_r \arrow[r, "\Phi"] & \mathscr{M}_{2,r} & & \mathscr{M}_g
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{i}$ es la aplicación inducida por la inclusión i y ζ_r es el cubrimiento no ramificado de grado finito inducido por la inclusión $\Gamma_3 \leq \Gamma$.

La composición

$$h_r := \tilde{i} \circ \tilde{\Phi} : X_r^{[3]} \to \mathscr{M}_g^{[3]}$$

es una aplicación holomorfa y no-constante. Si consideramos el pull-back de la familia universal de nivel tres $\pi_g^{[3]} : \mathscr{C}_g^{[3]} \to \mathscr{M}_g^{[3]}$ por h_r

$$\begin{tikzcd} h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{C}_g^{[3]} \arrow[d, "\pi_g^{[3]}"] \\ X_r^{[3]} \arrow[r, "h_r"] & \mathscr{M}_g^{[3]} \end{tikzcd}$$

obtenemos una aplicación holomorfa $h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]} \to X_r^{[3]}$ que es, por construcción, una fibración de Kodaira de género

$$g = 1 + p + r(p-1)/2.$$

Observación 7. *Esta construcción da lugar a fibraciones de Kodaira de cualquier género $g \geq 4$. En efecto, para verlo basta considerar el caso $p = 2$ obteniéndose $g = 3 + r/2$.*

El elemento τ_0 del grupo modular Mod_g induce un automorfismo del fibrado $\pi_g^{[3]}$ que preserva fibras. Además, por como hemos construido la base de la fibración

$$h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]} \to X_r^{[3]}$$

tal automorfismo induce un automorfismo de $h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]}$ de orden p que fija las fibras como conjuntos. Si τ_b denota su restricción sobre la fibra F_b entonces τ_b es un automorfismo de orden p fijando exactamente r puntos de modo que el cociente $F_b/\langle\tau_b\rangle$ es isomorfo a $C = \{y^2 = x^6 - 1\}$.

Adaptando adecuadamente la construcción anterior, podemos escribir la siguiente:

Proposición 6.6. *Para cada $\lambda \in \mathbb{C} - \{0, -27/4\}$ existe una fibración de Kodaira de género cuatro definida sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$.*

Demostración. La demostración es constructiva y análoga a la colección construida en la sección anterior. Consideramos las superficies de Riemann $E(\lambda)$ y $C(\lambda)$ de géneros uno y dos definidas como las curvas planas afines dadas por los polinomios $y^2 = x^3 + \lambda x + \lambda$ y $y^2 = x^6 + \lambda x^2 + \lambda$ respectivamente y $\pi : C(\lambda) \to E(\lambda)$ el cubrimiento de grado dos definido mediante $\pi(x, y) = (x^2, y)$, el cual ramifica en los puntos $s_1 = (0, \lambda^{1/2})$ y $s_2 = (0, -\lambda^{1/2})$ de $C(\lambda)$.

Recalcamos que como $\lambda \neq 0, -27/4$, entonces $E(\lambda)$ es no-singular y luego admite estructura de grupo abeliano $(E(\lambda), \oplus)$ cuyo elemento neutro es el punto al infinito ∞.

Sea a_λ un punto $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$−racional de $E(\lambda) - \{\infty, \pi(s_1) \oplus \pi(s_2), \pi(s_2) \oplus \pi(s_1)\}$. Entonces la superficie de Riemann compacta

$$X(\lambda) = \{(p, q) \in C(\lambda)^2 : \pi(p) = \pi(q) \oplus a_\lambda\}$$

tiene género cinco, está definida sobre el cuerpo $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$ y admite una aplicación holomorfa y no-constante $X(\lambda) \to \mathscr{M}_{2,2}$. De la misma forma que hicimos en la sección anterior, podemos construir una superficie de Riemann compacta $X(\lambda)^{[3]}$ provista de:

(a) un cubrimiento no-ramificado $\pi_3 : X(\lambda)^{[3]} \to X(\lambda)$, y de
(b) una aplicación holomorfa y no-constante $h : X(\lambda)^{[3]} \to \mathscr{M}_4^{[3]}$.

Notamos que como $X(\lambda)$ está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$ entonces (a) junto con la Proposición 5.7 implican que $X(\lambda)^{[3]}$ está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$ y, en consecuencia, la parte (b) asegura la existencia de una fibración de Kodaira

$$S(\lambda) := h^*\mathscr{C}_4^{[3]} \to X(\lambda)^{[3]}$$

de género cuatro definida sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$. Esto concluye la demostración. $\square$

Recalcamos que el cuerpo mínimo (en el sentido de la inclusión) de definición de $E(\lambda)$ está dado por $\mathbb{Q}(j(E(\lambda)))$ donde

$$j(E(\lambda)) = -12^3 \cdot \frac{4\lambda^3}{4\lambda^3 + 27\lambda^2}$$

es la función $j-$invariante de las curvas elípticas. Si elegimos λ como un número complejo trascendente entonces la curva $E(\lambda)$ es no aritmética. En tal caso, como $X(\lambda)^{[3]}$ está provista de un cubrimiento

$$X(\lambda)^{[3]} \to X(\lambda) \to C(\lambda) \to E(\lambda),$$

la Proposición 5.7 permite asegurar que $X(\lambda)^{[3]}$ no es aritmética y por tanto tampoco lo es la fibración de Kodaira $S(\lambda) \to X(\lambda)^{[3]}$. Hemos probado el siguiente resultado:

Proposición 6.7. *Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es trascendente sobre el cuerpo de los números racionales, entonces la fibración de Kodaira*

$$S(\lambda) \to X(\lambda)^{[3]}$$

es no aritmética.

Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \{0, -27/4\}$ dos números complejos algebraicamente independientes y f_i la fibración de Kodaira no aritmética definida sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda_i)}$ que provee la Proposición 6.6.

Lema 6.8. *Sea X una variedad algebraica proyectiva. Si X se puede definir sobre dos subcuerpos de $\mathbb{C}$ algebraicamente disjuntos sobre k, entonces X se puede definir sobre $\bar{k}$.*

Demostración. Ver [**24**, p. 347]. $\square$

Si f_1 se pudiese definir sobre $\overline{\mathbb{Q}(\lambda_2)}$ entonces, como $\overline{\mathbb{Q}(\lambda_1)}$ y $\overline{\mathbb{Q}(\lambda_2)}$ son cuerpos algebraicamente disjuntos, el lema anterior implicaría que f_1 es una fibración de Kodaira aritmética; esto contradice la Proposición 6.7. Se tiene el siguiente teorema:

TEOREMA 6.9. *Existe una cantidad infinita no numerable de dominios de Bergman no isomorfos obtenidos como cobertores universales de fibraciones de Kodaira.*

DEMOSTRACIÓN. El resultado sigue de la existencia de una cantidad infinita no-numerable de números complejos algebraicamente independientes y del Teorema 6.2. □

6.3. Sobre la Pendiente de una Fibración de Kodaira

La pendiente de una superficie algebraica proyectiva S está dada por el cociente entre sus números de Chern

$$\upsilon(S) = c_1^2(S)/c_2(S).$$

En esta sección haremos el ejercicio de calcular la pendiente de las fibraciones de Kodaira que hemos construido en la Sección 6.2.

PROPOSICIÓN 6.10. *La pendiente de la fibración de Kodaira*

$$f : S_r^p := h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]} \to B := X_r^{[3]}$$

construida en la Sección 6.2 es

$$\upsilon(S_r^p) = 2 + \frac{p^2-1}{p(2p + r(p-1))}.$$

Antes de demostrar esta proposición introduciremos algunos objetos y resultados que serán necesarios.

6.3.1. Generalidades. Comenzaremos repasando algunos conceptos y resultados generales sobre curvas en superficies e invariantes de superficies. Buenas referencias para esta subsección son [**4**] y [**5**].

Sea X una variedad algebraica proyectiva. El grupo de Picard $\mathrm{Pic}(X)$ de X es el grupo de divisores sobre X módulo equivalencia lineal. Cada morfismo sobreyectivo $f : X \to Y$ entre variedades induce una aplicación

$$f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \qquad D \mapsto f^*D$$

entre sus grupos de Picard definida de la siguiente manera: si D luce en el abierto U_i como $f_i = 0$ entonces f^*D luce en el abierto $f^{-1}(U_i)$ como $f_i f = 0$. Diremos que f^*D es el divisor pull-back de D por f.

En particular, si X es una superficie, Y es una curva y D es un divisor canónico de Y, digamos localmente dado por la expresión $h(z)dz$, entonces su pull-back está dado localmente por $h(f(z_1, z_2))\mathbf{J}(f)(z_1, z_2)dz_1 \wedge dz_2$.

Sea S una superficie algebraica proyectiva y C_1, C_2 dos curvas irreducibles contenidas en S. Para $p \in C_1 \cap C_2$ la multiplicidad de intersección de C_1 y C_2 en p es definida como

$$\mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S,p}/\langle f_1, f_2\rangle$$

donde f_1 y f_2 son expresiones locales para C_1 y C_2 en una vecindad de p y $\mathcal{O}_{S,p}$ denota el germen de funciones holomorfas de S en p. El producto de intersección entre C_1 y C_2 se define como

$$C_1 \cdot C_2 = \sum_{p \in C_1 \cap C_2} \mathrm{mult}_p(C_1 \cap C_2).$$

Nótese que lo anterior no nos permite definir un valor para la autointersección $C^2 := C \cdot C$; en tal caso definimos $C^2 := C \cdot C'$ donde C' es cualquier divisor en S linealmente equivalente a C. Es claro que curvas que no se intersecan tiene producto de intersección nulo. Por linealidad el producto de intersección se extiende a un producto bilineal en $\mathrm{Pic}(S)$.

Lema 6.11. *Sea C una curva irreducible y no-singular contenida en una superficie algebraica proyectiva S. Entonces*

$$2g_C - 2 = C^2 + C \cdot K$$

donde K es cualquier divisor canónico de S.

La característica topológica de Euler-Poincaré de una superficie compleja S está dada por la suma alternada

$$e(S) = \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \cdot b_i$$

donde $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$ es el $i-$ésimo número de Betti de S.

Si S es una superficie algebraica proyectiva, entonces

$$c_2(S) = e(S) \qquad c_1^2(S) = K^2$$

donde los símbolos $c_1^2(S)$ y $c_2(S)$ denotan los números de Chern de S y K es un divisor canónico de S. Además, la desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau [**67**] establece que

$$c_1^2(S) - 3c_2(S) \leq 0$$

consiguiéndose la igualdad si y sólo si el cobertor universal holomorfo de S es la bola unitaria dos-dimensional.

Si S es una fibración de Kodaira de género g sobre una curva de género γ, entonces vale la siguiente desigualdad

$$c_1^2(S) > 8(g-1)(\gamma-1)$$

conocida en la literatura como la desigualdad de Parshin-Arakelov. Además, su característica de Euler-Poincaré está dada por

$$e(S) = 4(g-1)(\gamma-1).$$

En particular, la pendiente $\upsilon(S) := c_1^2(S)/c_2(S)$ de S satisface

$$2 < \upsilon(S) < 3.$$

Como mencionamos en el inicio de este capítulo, las fibraciones de Kodaira fueron introducidas por Kodaira para probar que la signatura

$$\tau(S) = \frac{1}{3}(c_1^2(S) - 2c_2(S))$$

de un fibrado diferenciable no es siempre multiplicativa. Nótese que la signatura es multiplicativa si y sólo si $\tau(S) = 0$ y esto equivale a que $\upsilon(S) = 2$.

Las fibraciones $M_{n,m}$ con $m, n \geq 2$ enteros, construidas por Kodaira tienen pendiente

$$\upsilon(M_{n,m}) = 2 + \frac{m^2-1}{2m^2n - m^2 - n}$$

alcanzándose $2+1/3$ como valor máximo. Más tarde, Catanese y Rollenske en [**14**] construyeron una fibración de Kodaira con pendiente $2+2/3$, siendo éste el ejemplo conocido con pendiente más grande. Un interesante problema es averiguar si existen fibraciones de Kodaira con pendiente tan cercana a 3 como se desee.

6.3.2. Demostración de la Proposición 6.10. Recalcamos que la fibración de Kodaira

$$f : S_r^p := h_r^*\mathscr{C}_g^{[3]} \to B := X_r^{[3]}$$

construida en la Sección 6.2 goza, por construcción, de la propiedad de que S_r^p admite un automorfismo τ de orden p de modo que su restricción τ_b a la fibra $F_b := f^{-1}(b)$ es un automorfismo de orden p con r puntos fijos de tal suerte que

$$F_b/\langle\tau_b\rangle \cong C = \{y^2 = x^6 - 1\}.$$

Como p es primo la ramificación es total, esto es, los estabilizadores de los puntos de ramificación tienen orden p y, en consecuencia, el cubrimiento $F_b \to S$ ramifica sobre exactamente r valores.

Después de quizás pasar a un cubrimiento de B, es posible suponer que $S_p^r/\langle\tau\rangle \cong B \times C$. Denotaremos por

$$g : S_r^p \to S_r^p/\langle\tau\rangle \to C$$

la aplicación inducida por la proyección $B \times C \to C$. Es claro entonces que la restricción de g a cada fibra F_b es el cubrimiento $F_b \to C$ que caracteriza a las fibras de f.

Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} : C \to \mathbb{C}$ denotan las proyecciones en la primera y segunda coordenada de C respectivamente, entonces

$$\{w_1 = \mathbf{x}d\mathbf{x}/\mathbf{y}, w_2 = d\mathbf{x}/\mathbf{y}\}$$

es una base para el espacio vectorial $H^{1,0}(C)$ de $1-$formas holomorfas de C como vimos en el Ejemplo 1.10. Después de unos cálculos sencillos se puede ver que

$$\operatorname{div}(w_1) = s_1^1 + s_2^1 \qquad \operatorname{div}(w_2) = s_1^2 + s_2^2$$

donde $s_k^1 = (0, \pm i)$ son los puntos de ramificación del cubrimiento $\pi : C \to E$ y s_k^2 son los dos puntos al infinito de S.

Sea γ el género de B. Sean v_1 y v_2 dos formas holomorfas de B elegidas de tal suerte que, si $\{b_i^1\}$ y $\{b_j^2\}$ con $1 \le i, j \le 2\gamma - 2$ denotan los ceros de v_1 y v_2 respectivamente, entonces:

(a) s_k^1 y s_k^2 no sean valores de ramificación de ningún cubrimiento

$$g|_{F_{b_l^k}} : F_{b_l^k} \to C \qquad 1 \le l \le 2\gamma - 2,\ k = 1, 2.$$

(b) $b_i^1 \neq b_j^2$ para todo $1 \le i, j \le 2\gamma - 2$.

Definimos

$$W_k = f^* v_k \wedge g^* w_k$$

para $k = 1, 2$ dos formas holomorfas de S_r^p. De esta forma se tiene que

$$K^2 = \operatorname{div}(W_1) \cdot \operatorname{div}(W_2)$$

donde K denota la clase canónica de S_p^r.

Como la restricción de g a cada fibra F_b tiene exactamente r puntos fijos distintos,

$$\operatorname{Fix}(\tau) = R_1 \cup \ldots \cup R_r \subset S_r^p$$

donde cada $R_j \subset S_r^p$ es una curva en S_r^p. Es posible suponer (luego de tomar un cubrimiento apropiado de B y considerar la fibración pull-back por éste) que las curvas $R_1, \ldots, R_r$ son imágenes de secciones disjuntas de la fibración f y por tanto son curvas de género γ intersecando a cada fibra F_b en exactamente un punto. Este cambio de base no altera el valor de la pendiente.

Afirmación 1.

$$div(W_k) = \sum_{l=1}^{2\gamma-2} F_{b_l^k} + g^{-1}(s_1^k, s_2^k) + (p-1)\sum_{l=1}^{r} R_l.$$

Se tiene que $\mathrm{div}(W_k) = \mathrm{div}(f^*v_k \wedge g^*w_k) = \mathrm{div}(f^*v_k) + \mathrm{div}(g^*w_k)$. Como f es no ramificada, se tiene que

$$\mathrm{div}(f^*v_k) = f^{-1}\mathrm{div}(v_k) = f^{-1}(\cup_{l=1}^{2\gamma-2} b_l^k) = \sum_{l=1}^{2\gamma-2} F_{b_l^k}$$

y como la restricción de g a cada fibra F_b luce localmente como $z \mapsto z^p$ cerca de cada punto de ramificación, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(g^*w_k) &= g^{-1}\mathrm{div}(w_k) + (p-1)R_1 + \cdots + (p-1)R_r \\ &= g^{-1}(s_1^k, s_2^k) + (p-1)R_1 + \cdots + (p-1)R_r\end{aligned}$$

y esto prueba la Afirmación 1.

Denotaremos por $R_g = (p-1)R_1 + \cdots + (p-1)R_r$ el divisor de ramificación de g. La elección de las formas diferenciales permite ver que

$$g^{-1}(s_1^1, s_2^1) \cdot g^{-1}(s_1^2, s_2^2) = \sum_{l=1}^{2\gamma-2} F_{b_l^1} \cdot \sum_{m=1}^{2\gamma-2} F_{b_m^2} = 0.$$

Como la restricción de g a cada fibra F_b es un cubrimiento de grado p y gracias a la suposición (a), se tiene que

$$\sum_{l=1}^{2\gamma-2} F_{b_l^k} \cdot g^{-1}(s_i^k) = p(2\gamma - 2)$$

para $i, k = 1, 2$.

Además, para cualquier fibra F_b la cantidad $F_b \cdot R_g$ cuenta con multiplicidad el número de puntos de ramificación del cubrimiento $F_b \to C$. En concreto se tiene que

$$F_b \cdot R_g = (p-1)F_b \cdot R_1 + \cdots + (p-1)F_b \cdot R_r = r(p-1)$$

y de esta forma obtenemos

$$\sum_{l=1}^{2\gamma-2} F_{b_l^k} \cdot R_g = r(p-1)(2\gamma-2).$$

Por simetría se tiene que

$$g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g = g^{-1}(s_2^1) \cdot R_g \qquad g^{-1}(s_2^1) \cdot R_g = g^{-1}(s_2^2) \cdot R_g.$$

Sigue por la Afirmación 1 que $K^2 = \mathrm{div}(W_1) \cdot \mathrm{div}(W_2)$ es igual a

$$4p(2\gamma-2) + 2r(p-1)(2\gamma-2) + 2g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g + 2g^{-1}(s_1^2) \cdot R_g + R_g^2.$$

Como $R_j \cong B$ es una curva contenida en S_p^r, el Lema 6.11 implica que

$$2\gamma - 2 = R_j^2 + R_j \cdot K$$

para cada $1 \leq j \leq r$. Tomando $K = \operatorname{div}(W_1)$ y $K = \operatorname{div}(W_2)$ respectivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} R_j \cdot K &= (2\gamma - 2) + 2g^{-1}(s_1^1) \cdot R_j + (p-1)R_j^2 \\ &= (2\gamma - 2) + 2g^{-1}(s_1^2) \cdot R_j + (p-1)R_j^2 \end{aligned}$$

lo cual a su vez implica primeramente que $g^{-1}(s_1^1) \cdot R_j = g^{-1}(s_1^2) \cdot R_j$, luego $g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g = g^{-1}(s_1^2) \cdot R_g$ y en segundo lugar que

$$R_j^2 = -\frac{2}{p} g^{-1}(s_1^1) \cdot R_j$$

para $1 \leq j \leq r$. Sumando sobre j se sigue que

$$R_1^2 + \cdots + R_r^2 = -\frac{2}{p} g^{-1}(s_1^1) \cdot (R_1 + \cdots + R_r)$$

obteniendo finalmente la igualdad

$$R_g^2 = -\frac{2(p-1)}{p} g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g.$$

Afirmación 2.

$$g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g = (\gamma - 1)(p-1).$$

Como

$$g^{-1}(s_1^1) \cdot R_g = (p-1) \sum_{i=1}^{r} g^{-1}(s_1^1) \cdot R_i,$$

es suficiente mostrar que $g^{-1}(s_1^1) \cdot R_i = (\gamma - 1)/r$. Para probar esto verificaremos primero que la cardinalidad $|g^{-1}(s_1^1) \cap R_i|$ de $g^{-1}(s_1^1) \cap R_i$ es igual a $(\gamma - 1)/r$ y en segundo lugar que $g^{-1}(s_1^1)$ y R_i se intersecan transversalmente.

Por construcción, las entradas de la $r-$upla $\zeta_r(b) \in B$ corresponden a los valores de ramificación de la restricción de g a la fibra F_b. Sigue que $|g^{-1}(s_1^1) \cap R_i|$ es precisamente la cantidad de puntos $b \in B$ tales que $\zeta_r(b)$ tiene a s_1^1 como su $i-$ésima entrada. En consecuencia, si denotamos por $\pi_i : X_r \to C$ la proyección en la $i-$ésima coordenada, entonces

$$|g^{-1}(s_1^1) \cap R_i| = \deg(\zeta_r)|\pi_i^{-1}(s_1^1)|.$$

Como s_1^1 es uno de los puntos de ramificación del cubrimiento $\pi : C \to E$ en la cual la construcción de X_r fue basada, vemos que s_1^1 no es un valor de ramificación de π_i y de esta forma se tiene que

$$|\pi_i^{-1}(s_1)| = \deg(\pi_i) = 2^{r-1}.$$

Usando la fórmula de Riemann-Hurwitz se obtiene que $\deg(\zeta_r) = (2\gamma - 2)/r2^r$ probando la igualdad

$$|g^{-1}(s_1^1) \cap R_i| = (\gamma - 1)/r.$$

Sólo resta probar la transversalidad. Sea $a \in g^{-1}(s_1^1) \cap R_i$. Consideramos un entorno centrado en a de la forma $U_1 \times U_2$ de tal suerte que f luzca localmente como $f(u, v) = u$. En ese entorno, la sección $s : B \to R_i$ luce como $s(u) = (u, s(u))$ y, después de considerar el isomorfismo $(u, v) \to (u, v - s(u))$, se puede suponer que localmente la curva R_i está descrita por la ecuación $v = 0$.

Por otro lado, en el mismo entorno $U_1 \times U_2$ de a y en un entorno centrado en s_1^1 de S, la función holomorfa g se expresa mediante

$$g(u, v) = \sum_{i,j \geq 0} c_{ij} u^i v^j$$

para ciertos números complejos c_{ij}. Como $g(0, 0) = 0$ entonces $c_{00} = 0$. De esta forma, la curva $g^{-1}(s_1^1)$ luce localmente como

$$\sum_{i,j \geq 1} c_{ij} u^i v^j = 0.$$

El punto $(u, 0) \in U_1 \times U_2$ es un punto de la fibra F_u que, al mismo tiempo, está sobre la curva R_i. De esta manera, su imagen $g(u, 0)$ es el i-ésimo valor de ramificación de la aplicación $g : F_u \to C$ y así

$$\alpha(u) = g(u, 0) \qquad u \in U_1$$

donde $\alpha : B \to C$ es definida mediante la composición de ζ_r seguida por la proyección en la $i-$ésima coordenada π_i. Sigue que

$$c_{10} = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = \alpha'(0) = \pi_i'(\zeta_r(0)) \cdot \zeta_r'(0).$$

Como ζ_r es un cubrimiento no ramificado se tiene que $\zeta_r'(0) \neq 0$. Por otro lado, como s_1^1 aparece en la $i-$ésima entrada de $\zeta_r(0)$, la elección de los a_i asegura que s_2^1 no aparece en otra entrada de $\zeta_r(0)$ y de esta forma $\zeta_r(0)$ no es punto de ramificación de π_i; sigue que $\pi_i'(\zeta_r(0)) \neq 0$ obteniendo finalmente que $c_{10} \neq 0$. Lo anterior nos dice que $g^{-1}(s_1^1)$ luce localmente como

$$h(u, v) := \sum_{i,j \geq 1} c_{ij} u^i v^j = 0 \qquad c_{10} \neq 0.$$

Conforme a lo anterior, podemos escribir

$$\mathrm{mult}_a(g^{-1}(s_1^1) \cap R_i) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u, v]/\langle v, h(u, v)\rangle = 1$$

probando la Afirmación 2.

Gracias a la afirmación anterior podemos escribir la igualdad

$$K^2 = (2\gamma - 2)[4p + 2r(p-1) + (p^2-1)/p].$$

Como la característica de Euler-Poincaré de S_r^p está dada por

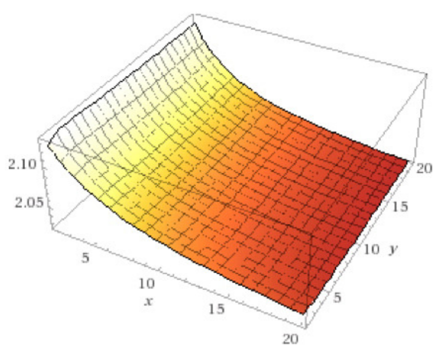
$$e(S_r^p) = 4(\gamma-1)(g-1) = (2\gamma-2)(2p + r(p-1)),$$

se obtiene finalmente que

$$\upsilon(S_r^p) = 2 + \frac{p^2-1}{p(2p + r(p-1))}$$

probando la Proposición 6.10.

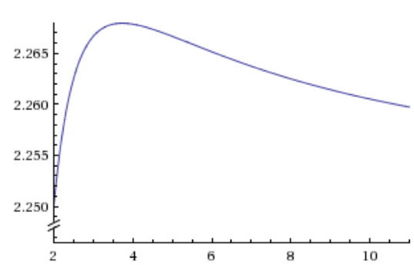
Es fácil ver que, en efecto, la pendiente de S_r^p es una cantidad en el intervalo $(2,3)$. La siguiente gráfica muestra los valores que toma $\upsilon(S_r^p)$ en función de los valores para $p, r \in \{2, \ldots, 20\}$.



Se puede visualizar que los valores máximos de $\upsilon(S_r^p)$ se consiguen cuando $r = 2$. En concreto, en tal caso la pendiente está dada por

$$\upsilon(S_r^p) = 2 + \frac{p^2-1}{2p(2p-1)}$$

alcanzándose $2 + 4/15 = 2,266...$ como valor máximo para $p = 3$ y $p = 5$. Cuando $p \to \infty$ obtenemos el mismo valor que para $p = 2$, a saber, $2 + 1/4 = 2,25$. La siguiente gráfica ilustra la situación anterior.



Bibliografía

[1] Ahlfors, L. y Bers, L., *Riemann's mapping theorem for variable metrics*, Ann. of Math. **72**, No. 2 (1960), 385-404.

[2] Arakelov, S., *Families of curves with fixed degeneracies*, Math. USRR Izv. **5** (1971), 1277-1302.

[3] Atiyah, M. y Macdonald, I., *Introducción al Álgebra Conmutativa,* Addison-Wesley Publishing Co. (1969).

[4] Barth, W., Hulek, K., Peters, C. y Van de Ver, A., *Compact Complex Surfaces,* 2nd Edition, Springer-Verlag (2004).

[5] Beauville, A., *Complex Algebraic Surfaces*, London Math. Soc. **68** (1983).

[6] Beck, M., Jiang, Y., Mitra, S. y Shiga, H., *Extending holomorphic motions and monodromy*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **37**, No. 1 (2012), 53-67.

[7] Belyi, G., *On Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, Math. USSR Izv. **14** (1980), 247-256.

[8] Bers, L., *Holomorphic families of isomorphisms of Möbius groups*, J. Math. Kyoto Univ. **26**, No. 1 (1986), 73-76.

[9] Bers, L., *Simultaneous Uniformization*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 94-97.

[10] Bers, L., *Uniformization, moduli and kleinian groups*, Bull. London Math. Soc. **4** (1972), 257-300.

[11] Campana, F., *Twistor spaces and non-hyperbolicity of certain symplectic Kähler manifolds,* Complex analysis, Aspects of Math. **17** (1991), 64-69.

[12] Caporaso, L., *On certain uniformity properties of curves over function fields,* Compositio Math. **130**, No. 1 (2002), 1-19.

[13] Cartan, H., *Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes,* Princeton University Press (1957), 90-102.

[14] Catanese, F. y Rollenske, C., *Double Kodaira Fibrations*, J. Reine Angew. Math. **628** (2009), 205-233

[15] Coskun, I., *The arithmetic and the geometry of Kobayashi hyperbolicity,* Contemp. Math. **388** (2005), 77-88.

[16] Deligne, P. y Mumford, D., *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), 75-109.

[17] Earle, C. y Fowler, R., *Holomorphic families of open Riemann Surfaces*, Math. Ann. **270**, No. 2 (1985), 249-273

[18] Earle, C. y Kra, I., *On Holomorphic Mappings between Teichmüller spaces,* Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York (1974), 107-124.

[19] Earle, C., Kra, I. y Krushkal, S., *Holomorphic motions and Teichmüller spaces,* Trans. Amer. Math. Soc. **343**, No. 2 (1994), 927-948.

[20] Farkas, H. y Kra, I., *Riemann surfaces*, Grad. Texts in Maths. **71**, Springer-Verlag (1980).

[21] Gilman, J., *On the moduli of compact Riemann surfaces with a finite number of punctures*, Discontinuous groups and Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies **79**, Princeton University Press (1974), 181-205.

[22] Girondo, E. y González-Diez, G., *Introduction to compact Riemann surfaces and dessin d'enfants*, London Math. Soc. Stud. Texts **79** (2012).

[23] González-Diez, G., *Belyi's Theorem for complex surfaces*, Amer. J. Math. **130**, No. 1 (2008), 59-74.

[24] González-Diez, G., *Variations on Belyi's Theorem*, Q. J. Math. **57**, No. 3 (2006), 339-354.

[25] González-Diez, G. y Harvey, W., *On complete curves in moduli space I,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **110**, No. 3 (1991), 461-466.

[26] González-Diez, G., y Harvey, W., *Moduli of Riemann surfaces with symmetry,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. **173** (1992), 75-93.

[27] González-Diez, G., y Reyes-Carocca, S., *The arithmeticity of a Kodaira fibration is determined by its universal cover,* Comm. Math. Helv. To appear.

[28] Grauert, H. y Remmert, R., *Coherent Analytic Sheaves,* Grad. Texts in Maths. **265**, Springer-Verlag (1984).

[29] Griffiths, P., *Complex analytic properties of certain Zariski open sets on algebraic varieties*, Ann. of Math. **94**, No. 2 (1971), 21-51.

[30] Griffiths, P., y Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry,* Wiley-Interscience (1978).

[31] Grothendieck, A., *Esquisse d'un Programme. In Geometric Galois Actions. 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme. ed. Schneps, L. and Lochak, P.,* London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242** (1997), 5-48.

[32] Grothendieck, A., *Techniques de construction en geometrie analytique,* Sem. Cartan Exposé 17 (1960-61).

[33] Harris, J. y Morrison, I., *Moduli of Curves*, Grad. Texts in Maths. **187**, Springer-Verlag (1988).

[34] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Maths. **52**, Springer-Verlag (1977).

[35] Hidalgo, R. y Reyes-Carocca, S., *A constructive proof of Weil's Galois descent theorem*, arXiv:1203.6294.

[36] Howard, A. y Sommese, A., *On the theorem of de Franchis,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **10**, No. 3 (1983), 429-436.

[37] Imayoshi, Y., *Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces,* Proc. of the 1978 Stony Book Conference, Riemann Surfaces and Related Topics, Ann. of Math. Stud. **97** (1980), 277-300.

[38] Imayoshi, Y., *Universal covering spaces of certain quasiprojective algebraic surfaces,* Holomorphic Osaka J. Math. **20** (1983), No. 3, 581-598.

[39] Imayoshi, Y., y Nishimura, M., *A remark on universal coverings of holomorphic families of Riemann surfaces,* Kodai Math. J. **28**, No. 2 (2005), 230-247.

[40] Imayoshi, Y. y Shiga, H., *A finiteness theorem for holomorphic families of Riemann surfaces,* Holomorphic Functions and Moduli II, MSRI **11** (1998), 207-219.

[41] Johnson, F., *Linear properties of poly-Fuchsian groups,* Collect. Math. **45**, No. 2 (1994), 183-203.

[42] Kawamata, Y., *Kodaira dimension of algebraic fiber spaces over curves,* Invent. Math. **66**, No. 1 (1982), 57-71.

[43] Kobayashi, S., *Hyperbolic complex spaces,* Grad. Texts in Maths. **318**, Springer-Verlag (1998).

[44] Kobayashi, S., *Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings,* Marcel Dekker Inc., New York, (1970).

[45] Kodaira, K., *A certain type of irregular algebraic surfaces,* J. Analyse Math. **19** (1967), 207-215.

[46] Kra, I., *Automorphic Forms and Kleinian Groups,* Math. Lect. Note Ser. (1972).

[47] Lang, S., *Complex Analysis,* Grad. Texts in Maths. **103**, 4th Edition, Springer-Verlag (1999).

[48] Lehto, O. y Virtanen, K., *Quasiconformal mappings in the plane,* Grad. Texts in Maths. **126**, 2nd Edition, Springer-Verlag (1972).

[49] Liu, F., *Linear properties of poly-Fuchsian motions,* (In Chinese), Journal of Fudan University (Natural Science) **47** (2008), 172-176.

[50] Maehara, K., *A finiteness property of varieties of general type,* Math. Ann. **262**, No. 1 (1983), 101-123.

[51] Mañé, R., Sad, P. y Sullivan, D., *On the dynamics of rational maps,* Ann. Sci. École Norm. Supér. (4) **16**, No. 2 (1983), 193-217.

[52] Massey, W., *A basic course in algebraic topology,* Grad. Texts in Maths. **127**, Springer-Verlag (1991).

[53] Miranda, R., *Algebraic curves and Riemann surfaces,* Graduate Studies in Maths. **5**, Amer. Math. Soc. (1995).

[54] Mumford, D., *Abelian quotient of the Teichmüller modular group,* J. Analyse **18** (1967), 227-244.

[55] Mumford, D., *Algebraic Geometry I Complex Projective Varieties,* Grad. Texts in Maths. **221**, Springer-Verlag (1976).

[56] Mumford, D., *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves,* Graduate Studies in Maths., Arithmetic and Geometry, papers dedicated to I.R. Shafarevich on the occasion of his 60th birthday, **2** (1983), 271-328.

[57] Nag, S,. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces,* Canadian Math. Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley-Intersciences (1988).

[58] Selberg, A., *On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces,* Contributions to function theory, TATA Institute, 147-164 (1960).

[59] Serre, J., *Géométrie Algébrique et Géométrie Analytique,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **6**, (1956), 1-42.

[60] Shabat, G., *Local reconstruction of complex algebraic surfaces from universal coverings,* Funktsional. Anal. i Prilozhen. **17** No. 2 (1983), 90-91.

[61] Shabat, G., *The complex structure of domains covering algebraic surfaces,* Funct. Anal. Appl. **11** (1977), 135-142.

[62] Shafarevich, I., *Basic Algebraic Geometry,* Grad. Texts in Maths. **213**, Springer-Verlag (1977).

[63] Slodkowski, Z., *Holomorphic motions and polynomials hulls,* Proc. Amer. Math. Soc. **111**, No. 2 (1991), 347-355.

[64] Sullivan, D., *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics II. Structural stability implies hyperbolicity for Kleinian groups,* Acta Math. **155**, No. 3-4 (1985), 243-260.

[65] Wang, X., *Variation of the Bergman kernels under deformation of complex structures,* arXiv:1307.5660.

[66] Weil, A., *The field of definition of a variety,* Amer. J. Math. **78** (1956), 509-524.

[67] Yau, S., *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **74**, No. 5 (1977), 1789-1799.